Lösungen

Grundlagen der Nachrichtentechnik

– WS 2018/2019 –

Maik Röper
Sportturm, Raum C3220,
Tel.: 0421/218-62387
E-mail: `roeper@ant.uni-bremen.de`

Universität Bremen, FB1
Institut für Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik
Arbeitsbereich Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. A. Dekorsy
Postfach 33 04 40
D–28334 Bremen

WWW-Server: `http://www.ant.uni-bremen.de`

Version vom 11. September 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Kontinuierliche Signale und Systeme **2**

Aufg. 1: Fouriertransformation . . . 2

Aufg. 2: Transformation in den Tiefpaß- bzw. Basisbandbereich . . . 2

Aufg. 3: Spektren analytischer Signale . . . 3

Aufg. 4: Die erste Nyquistbedingung . . . 4

Aufg. 5: Lineare Verzerrungen . . . 4

Aufg. 6: Klirrfaktor . . . 5

Aufg. 7: Additive Störungen . . . 5

2 Analoge Übertragung **6**

Aufg. 8: Zweiseitenband (ZSB)-Modulation . . . 6

3 Diskretisierung von Quellensignalen **7**

Aufg. 9: Ideale Abtastung im Zeitbereich . . . 7

Aufg. 10: Quantisierung . . . 7

Aufg. 11: Quantisierungsfehler . . . 8

4 Digitale Übertragung **9**

Aufg. 12: Matched Filter, 1. & 2. Nyquist-Bedingung . . . 9

Aufg. 13: Matched Filter, Fehlerwahrscheinlichkeit . . . 10

Aufg. 14: Bitfehlerwahrscheinlichkeit . . . 12

Aufg. 15: Mittlere Symbolenergie bei 16-QAM . . . 14

Aufg. 16: Differentielle PSK-Modulation . . . 15

5 Codierung **16**

Aufg. 17: Quellencodierung / Huffman-Code . . . 16

Aufg. 18: Kanalkapazität eines BSC . . . 16

Aufg. 19: Distanzeigenschaften / Fehlerkorrektur . . . 16

Aufg. 20: Nebenklassenzerlegung und Syndromdecodierung . . . 17

Aufg. 21: Generator- und Prüfmatrizen . . . 17

1 Kontinuierliche Signale und Systeme

Aufgabe 1: **Fouriertransformation**

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ unter Anwendung des Modulationssatzes.

(b) Gegeben sei das reelle Spektrum $X(j\omega)$:

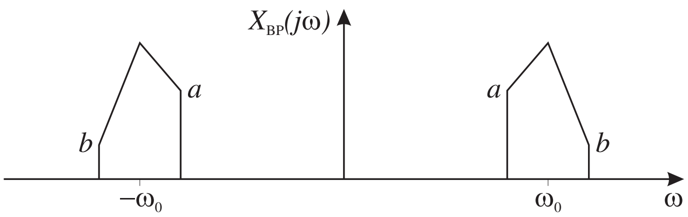
$$X(j\omega) = \mathrm{tri}\left(\frac{\omega + \omega_0}{\omega_0}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)$$

Skizzieren Sie $X(j\omega)$, und bestimmen Sie die zugehörige Zeitfunktion $x(t)$, wobei für die Dreieckfunktion gilt:

$$\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|, & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: **Transformation in den Tiefpaß- bzw. Basisbandbereich**

Gegeben ist das abgebildete reelle Spektrum eines Bandpaßsignals $X_{BP}(j\omega)$.

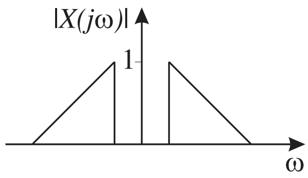


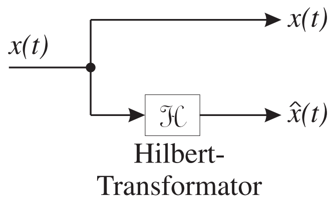
(a) Skizzieren Sie das Spektrum des zugehörigen, äquivalenten Tiefpaßsignals $X_{TP}(j\omega)$.

(b) Welche Bedingungen müssen die Parameter a und b erfüllen, damit das Tiefpaßsignal im Zeitbereich $x_{TP}(t)$ reell ist?

Aufgabe 3: **Spektren analytischer Signale**

Ein reelles Signal $x(t)$ mit dem abgebildeten Betragsspektrum $|X(j\omega)|$ wird auf das dargestellte System gegeben.

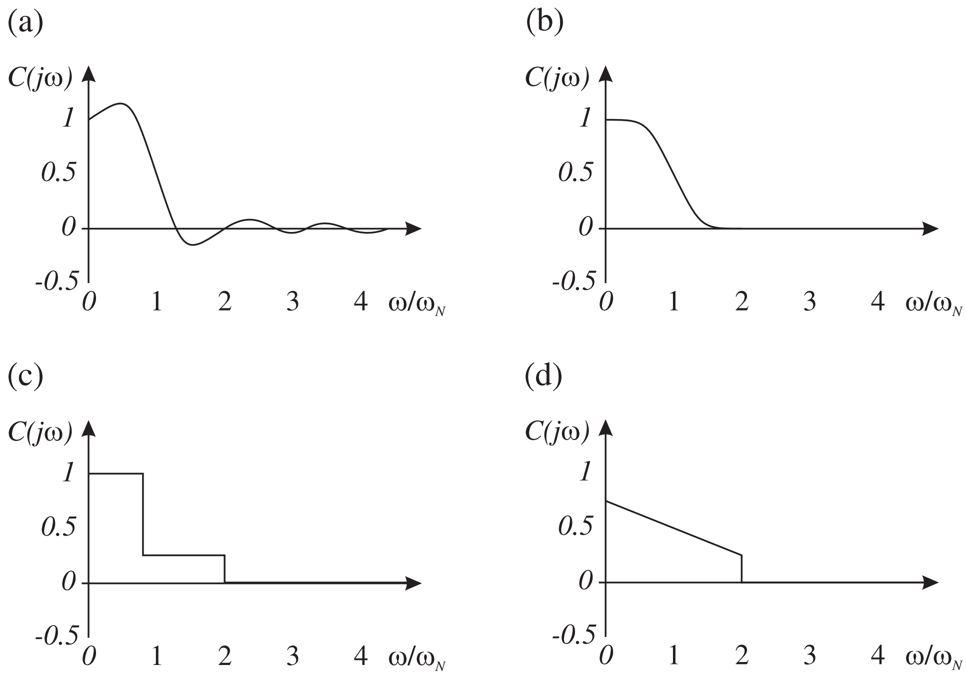




Die beiden Ausgangssignale $x(t)$ und $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ werden zu einem komplexen Zeitsignal $x^{+}(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t)$ zusammengefaßt. Skizzieren Sie das Betragsspektrum $|X^{+}(j\omega)| = |\mathcal{F}\{x^{+}(t)\}|$

Aufgabe 4: **Die erste Nyquistbedingung**

Gegeben sind die abgebildeten Frequenzgänge linearphasiger Filter. Geben Sie an, ob diese Filter die erste Nyquist-Bedingung erfüllen, und liefern Sie eine kurze Begründung.



Aufgabe 5: **Lineare Verzerrungen**

Ein Übertragungskanal habe die Impulsantwort

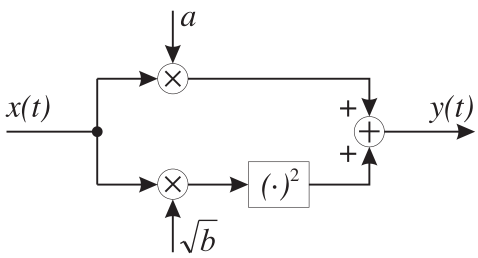
$$h(t) = \delta_0(t) + \delta_0(t - T)$$

(a) Berechnen Sie die Betragsübertragungsfunktion $|H(j\omega)|$ sowie die Gruppenlaufzeit $\tau_g(\omega)$ und die Phasenlaufzeit $\tau_p(\omega)$. Welche Eigenschaft zeichnet das Übertragungssystem $h(t)$ aus?

(b) Wie wirken sich die Gruppen- und die Phasenlaufzeit auf ein übertragenes Signal aus?

Aufgabe 6: **Klirrfaktor**

Der abgebildete, gedächtnisfreie Übertragungskanal enthält eine Nichtlinearität in quadratischer Form.



Bei sinusförmigem Eingangssignal (Amplitude 1) $x(t)$ wird am Kanalausgang ein Klirrfaktor von $K = 5\%$ gemessen. Bestimmen Sie das Verhältnis a/b.

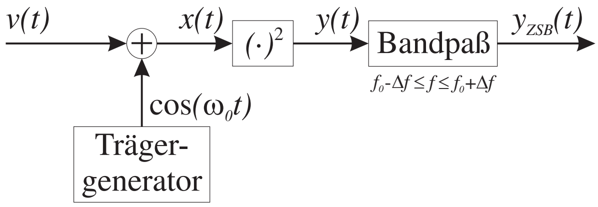
Aufgabe 7: **Additive Störungen**

Über ein analoges Übertragungsmedium wird ein sinusförmiges Signal übertragen. Die Amplitude am Empfänger sei Eins. Auf dem Übertragungsweg wird ein additives Rauschen überlagert. Die Leistung der Störung sei $\sigma_r^2 = 0.2$. Geben Sie das S/N-Verhältnis (SNR - signal-to-noise ratio) in dB an.

2 Analoge Übertragung

Aufgabe 8: Zweiseitenband (ZSB)-Modulation

Mit der dargestellten Anordnung soll ein reines Zweiseitenband (ZSB)-Signal erzeugt werden:



(a) Berechnen Sie das Eingangssignal $y(t)$ des Bandpaßfilters und stellen Sie das entsprechende Spektrum $Y(j\omega)$ grafisch dar.

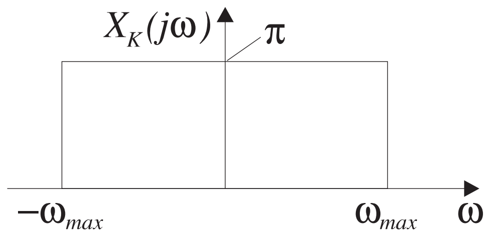
(b) Welche Bedingungen müssen die Grenzfrequenz f_{max} des Signals $v(t)$ und die Trägerfrequenz f_0 erfüllen, damit am Ausgang des Bandpasses ein fehlerfreies ZSB-Signal entsteht?
Wie groß sind die obere und die untere Grenzfrequenz f_o und f_u des Bandpaßfilters zu wählen?

3 Diskretisierung von Quellensignalen

Aufgabe 9: Ideale Abtastung im Zeitbereich

Das zeitkontinuierliche Signal $x_K(t)$ des folgenden Spektrums $X_K(j\omega)$ soll untersucht werden.

$$X_K(j\omega) = \begin{cases} \pi, & -\omega_{max} \le \omega \le \omega_{max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



(a) Berechnen Sie das Zeitsignal

$$x_K(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_K(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

und stellen Sie es im Bereich $-\frac{4\pi}{\omega_{max}} \le t \le \frac{4\pi}{\omega_{max}}$ grafisch dar.

(b) Das Signal $x_K(t)$ werde

(i) mit $T_1 = \frac{1}{f_{max}} = \frac{2\pi}{\omega_{max}}$,
(ii) mit $T_2 = \frac{1}{2f_{max}} = \frac{\pi}{\omega_{max}}$ und schließlich
(iii) mit $T_3 = \frac{1}{4f_{max}} = \frac{\pi}{2\omega_{max}}$

abgetastet. Skizzieren Sie die abgetasteten Zeitsignale $x_T(t)$, indem Sie die gewichteten Dirac-Impulse durch Linien entsprechender Länge darstellen.

(c) Berechnen Sie schließlich für alle drei Fälle die resultierenden Spektren $X_T(j\omega)$, und stellen Sie diese grafisch dar. In welchen Fällen kann das Ausgangssignal $x_K(t)$ sicher reproduziert werden? Wie nennt man den Fall, bei dem dieses nicht mehr gewährleistet ist?

Aufgabe 10: Quantisierung

Für ein Tonstudio wird ein 16-kanaliges, digitales Mischpult konzipiert. Wie groß muß die Wortbreite w in jedem Kanal mindestens sein, wenn auch unter ungünstigen Bedingungen ein S/N-Verhältnis von 86 dB gewährleistet werden soll.

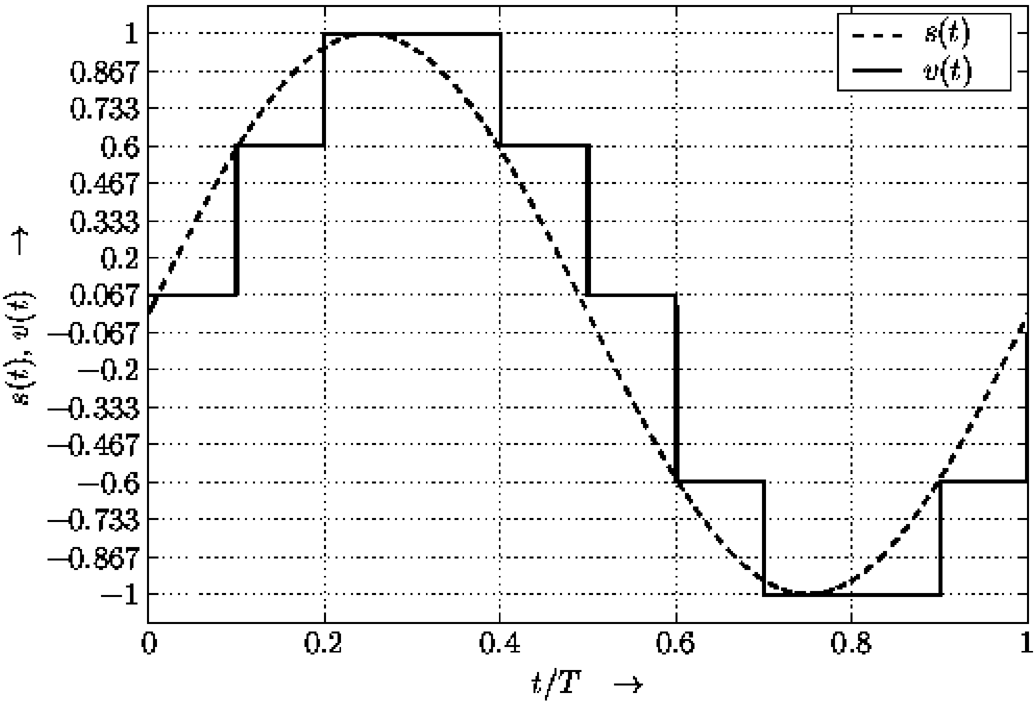
Hinweise: Unter "ungünstigen Bedingungen" wird verstanden, daß nur in *einem* Kanal ein Nutzsignal enthalten ist, während alle anderen Kanäle unkorrelierte Quantisierungs-Rauschsignale beisteuern. Nehmen Sie für das Nutzsignal eine Sinusschwingung mit Vollaussteuerung an.

Die mittlere Leistung des Quantisierungsrauschens eines Kanals ergibt sich in Abhängigkeit von der Wortbreite zu

$$\frac{Q^2}{12} = \frac{2^{-2(w-1)}}{12}.$$

Aufgabe 11: **Quantisierungsfehler**

Ein voll ausgesteuertes, sinusförmiges Nutzsignal $s(t) = \sin(2\pi t/T)$ soll zu den Abtastzeitpunkten $T_A = \nu T/10$, $\nu \in \mathbb{N}$, durch $\ell = 4$ bit codiert werden. Die Abbildung zeigt den Verlauf des entsprechenden linearen, symmetrischen Quantisierungs-Signals $v(t)$ nach einer *Sample-and-Hold*-Stufe.



(a) Bestimmen Sie die Quantisierungs-Stufe Q in Abhängigkeit von der Wortbreite ℓ.

(b) Berechnen Sie das S/N-Verhältnis zwischen dem Signal $s(t)$ und dem Quantisierungs-Fehler $q(t) = v(t) - s(t)$ in dB.

Hinweise:
- In den Abtastzeitpunkten ergeben sich für das sinusförmige Nutzsignal die folgenden Amplituden-Werte:

t/T	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$s(t)$	0	0.588	0.951	0.951	0.588

t/T	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$s(t)$	0	-0.588	-0.951	-0.951	-0.588

- $\sin^2(2\pi t/T) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(4\pi t/T)]$

(c) Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) mit dem analytisch berechneten S/N-Verhältnis bei einer 4-bit-Quantisierung des Nutzsignals $s(t)$.

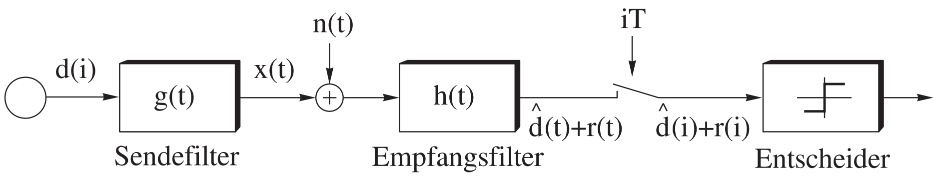
4 Digitale Übertragung

Aufgabe 12: Matched Filter, 1. & 2. Nyquist-Bedingung

Eine Datenquelle liefert die redundanzfreie Folge $d(i) \in \{-1, 1\}$. Im Datensender erfolgt eine rechteckförmige Impulsformung durch

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} - T/2 \leq t < T/2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Auf dem Übertragungsweg wird additives weißes Rauschen überlagert.



(a) Geben Sie die Matched-Filter-Impulsantwort für den Empfänger an. Skizzieren Sie die auf eins normierte Gesamtimpulsantwort $y(t)$ des Übertragungssystems.

Für die weiteren Aufgabenteile soll die Normierung der Gesamtimpulsantwort auf eins beibehalten werden. Ferner ist die Rauschquelle abgeschaltet.

(b) Konstruieren Sie das Augendiagramm am Matched-Filter-Ausgang. Prüfen Sie, ob die erste und die zweite Nyquist-Bedingung erfüllt sind und begründen Sie dieses anhand der Gesamtimpulsantwort.

(c) Am Matched-Filter-Ausgang erfolgt eine Abtastung zu den Zeitpunkten

$$t_i \;=\; i\,T + \Delta t \;; \qquad |\Delta t| \leq T/2.$$

Bei nichtidealer Abtastung ($\Delta t \neq 0$) ergibt sich Intersymbol-Interferenz. Berechnen Sie das zugehörige $(S/N)_{ISI}$-Verhältnis als Funktion von Δt. Wie groß ist das $(S/N)_{ISI}$ für $\Delta t = T/2$?

Aufgabe 13: **Matched Filter, Fehlerwahrscheinlichkeit**

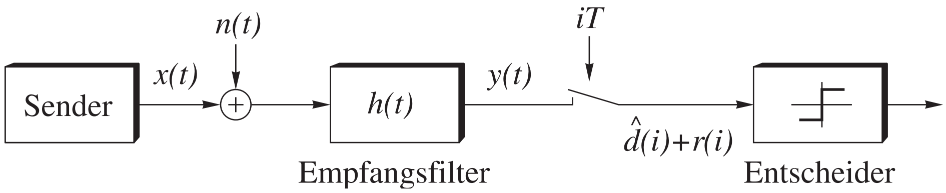
Eine digitale Datenquelle sendet antipodale Symbole $d(i) \in \{-1, 1\}$ mit der Symbolrate $1/T = 10\,\text{kbit/s}$. Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten der beiden Daten sind gleich. Es erfolgt eine rechteckförmige Impulsformung; das Ausgangssignal des Datensenders lautet somit

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d(i)\, g(t - iT) \qquad \text{mit} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf dem Übertragungswege wird weißes, gaußverteiltes Rauschen $n(t)$ mit einer spektralen Leistungsdichte von

$$S_{nn}(j\omega) = \frac{1}{8} \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{Hz}} \qquad \text{f'ur} \qquad -\infty \le \omega \le \infty$$

überlagert. Am Empfänger erfolgt eine Filterung (Filter-Impulsantwort $h(t)$) und eine Abtastung im Symboltakt, wie es in der folgenden Abbildung gezeigt ist.

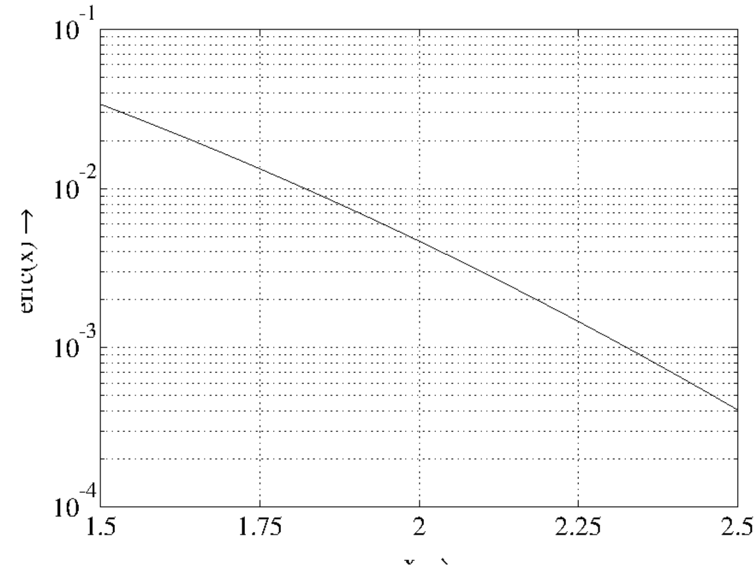


a) Bestimmen Sie die bezüglich der Signal-zu Rauschleistung optimale Impulsantwort $h(t)$ des Empfangsfilters. Skalieren Sie die Impulsantwort so, daß bei ungestörtem Empfangssignal (d.h. $n(t) = 0$) nach optimaler Symboltakt-Abtastung $\hat{d}(i)$ die Werte $+1$ und -1 annimmt.

b) Berechnen Sie für das so festgelegte Empfangsfilter die Leistung σ_r^2 der diskreten Rauschgröße $r(i)$ am Filterausgang, wenn auf dem Übertragungsweg Rauschen der oben angegebenen Leistungsdichte überlagert wird.

c) Geben Sie das S/N-Verhältnis in dB nach der Symboltakt-Abtastung an.

d) Bestimmen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit nach einer Schwellwertentscheidung des Signals $y(i)$ bei Verwendung der optimalen Schwelle. Den hierzu benötigten Wert der erfc-Funktion können Sie der folgenden Graphik entnehmen.



10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
erfc(x) →
1.5
1.75
2
2.25
2.5

Aufgabe 14: **Bitfehlerwahrscheinlichkeit**

Das Ergebnis eines Fußballspiels (A: Sieg der Heim-Mannschaft, B: Unentschieden, C: Niederlage der Heim-Mannschaft) soll einem Empfänger mitgeteilt werden, wobei die Ereignisse A, B und C die gleiche a-priori Wahrscheinlichkeit haben. Dazu wird eine digitale Übertragung im Basisband realisiert, wobei die Ereignisse auf ein zweistufiges Alphabet mit

$$A \to d(1) = 1; \quad d(2) = 0$$

$$B \to d(1) = 0; \quad d(2) = 1$$

$$C \to d(1) = 1; \quad d(2) = 1$$

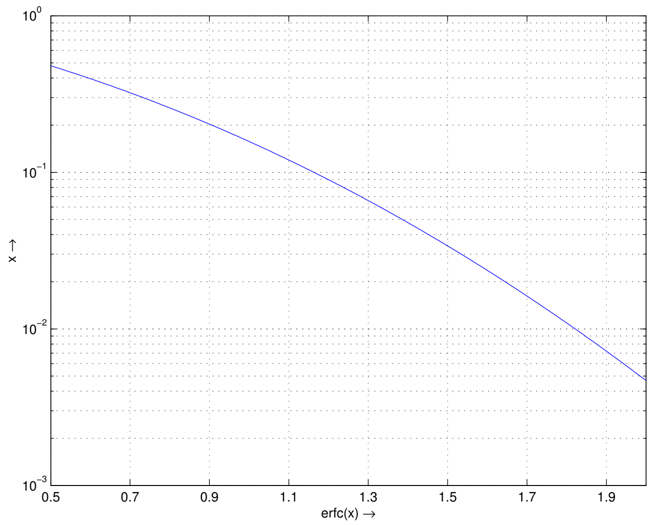
abgebildet werden. Auf dem Übertragungsweg wird das Signal $d(i)$ von weißem Rauschen mit der Leistung $\sigma_n^2 = 0.1$ und der Verteilungsdichtefunktion

$$p_n(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-\zeta^2/(2\sigma_n^2))$$

überlagert.

(a) Bestimmen Sie die diskrete Verteilungsdichtefunktion des binären Signals $d(i)$.

(b) Legen Sie eine Schwelle S für die Datenentscheidung von $d(i)$ so fest, dass die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung $\hat{d}(i) \neq d(i)$ am Empfänger minimiert wird. Berücksichtigen Sie dabei die in Aufgabenteil (a) ermittelten a-priori Wahrscheinlichkeiten $\Pr\{d(i) = 0\}$ und $\Pr\{d(i) = 1\}$.



(c) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Funktion erfc (siehe Graphik) die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr\{\hat{d}(i) = 1|d(i) = 0\}$ (die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Bedingung $d(i) = 0$ das geschätzte Datum $\hat{d}(i)$ den Wert 1 annimmt). Berechnen Sie außerdem auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr\{\hat{d}(i) = 0|d(i) = 1\}$, $\Pr\{\hat{d}(i) = 1|d(i) = 1\}$ und $\Pr\{\hat{d}(i) = 0|d(i) = 0\}$.

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die entschiedenen Daten keinem der Ereignisse A, B oder C sinnvoll zugeordnet werden können.

Aufgabe 15: **Mittlere Symbolenergie bei 16-QAM**

Eine Quelle gibt gleichverteilte, statistisch unabhängige Binärdaten mit einer Bitrate von $1/T_{\text{bit}}$ ab. Es erfolgt eine 16-stufige QAM-Übertragung mit der abgebildeten Signalraumverteilung. Die Datenwerte werden rechteckförmig umgetastet.

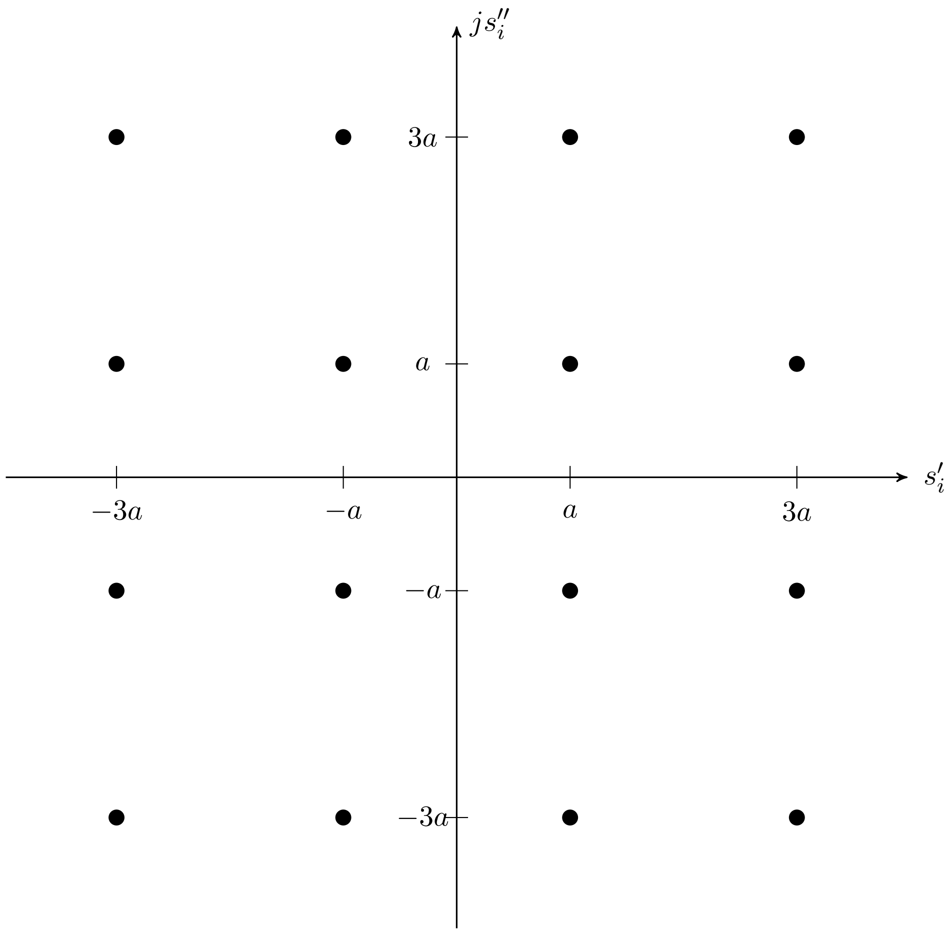


Abbildung 1: 16-QAM-Signalraum

(a) Geben Sie an, wie viele Bits mit einem 16-QAM-Symbol gesendet werden.

(b) Was sind die Vor- und Nachteile einer 16-QAM gegenüber einer BPSK?

(c) Bestimmen Sie den Parameter a, sodass die mittlere Sendeleistung auf $\bar{E}_s = E\{|s_i|^2\} = 1$ normiert ist. Geben Sie die im Mittel für jedes Bit aufgewendete Energie $\bar{E}_b$ an.

(d) Die modulierten Bits werden nun rechteckförmig umgetastet und über einen AWGN-Kanal mit Rauschleistung $\sigma_n = 10^{-1}$ gesendet. Bestimmen Sie das mittlere Signal zu Rausch-Verhältnis am Empfänger in dB.

Aufgabe 16: **Differentielle PSK-Modulation**

Gegeben ist ein DPSK-Modulator. Die Zuordnungen zwischen den möglichen Dibit und den Phasendifferenzen sind in nachfolgender Tabelle wiedergegeben.

$\Delta\varphi_\mu$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$-3\pi/4$	$-\pi/4$
Dibit	00	01	11	10

a) Handelt es sich um eine Gray-Codierung?

b) Am Eingang liegt folgende Bitfolge: 00 11 01 10 01
Geben Sie die Folge der absoluten Phasenwerte $\varphi(i)$ des gesendeten Signals an. Der Anfangswert der Phase sei $\varphi(-1) = 0$.

c) Zum Zeitpunkt $i = 2$ ergibt sich ein Entscheidungsfehler: $\hat{\varphi}(2) = \varphi(2) + \pi/2$. Geben Sie die Bitfolge nach der Differenz-Decodierung an.

5 Codierung

Aufgabe 17: **Quellencodierung / Huffman-Code**

Der Optimal-Code nach Huffman hat den Zweck, die Redundanz innerhalb eines Codewortes zu reduzieren und die mittlere Codewortlänge der Entropie der Quelle anzupassen.

(a) Bestimmen Sie mittlere Codewortlänge und die Entropie für ein Alphabet von 5 Zeichen. Die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Zeichen seien zunächst gleich.

(b) Bestimmen Sie die Redundanzreduzierung mittels Huffman-Codierung für folgende Verteilung der Auftrittswahrscheinlichkeiten dieser 5 Zeichen

$$Pr(X_\nu) = \{0.24,\ 0.15,\ 0.3,\ 0.11,\ 0.2\} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, 5.$$

Aufgabe 18: **Kanalkapazität eines BSC**

Leiten Sie für den binären symmetrischen Kanal (BSC) die Kapazität für gleichwahrscheinliche Eingangssymbole $Pr(X_0) = Pr(X_1) = 0.5$ in Abhängigkeit von der Fehlerwahrscheinlichkeit P_e ab.

Aufgabe 19: **Distanzeigenschaften / Fehlerkorrektur**

Gegeben sei ein $(n,k)_q$ Blockcode mit der minimalen Distanz $d_{min} = 8$.

a) Bestimmen Sie die maximale Anzahl der korrigierbaren Fehler und die Anzahl der erkennbaren Fehler bei reiner Fehlererkennung.

b) Der Code soll zur Korrektur von 2 Fehlern und zur gleichzeitigen Erkennung von 5 weiteren Fehlern verwendet werden. Zeigen Sie durch Veranschaulichung im Coderaum, dass dies möglich ist.

c) Zeigen Sie durch Veranschaulichung im Coderaum, wieviele Möglichkeiten der Veränderung eines Codewortes bei der Übertragung über einen gestörten Kanal zu berücksichtigen sind.

Aufgabe 20: **Nebenklassenzerlegung und Syndromdecodierung**

a) Geben Sie die Anzahl der Syndrome des $(7, 4, 3)$-Hamming-Codes an und vergleichen Sie sie mit der Anzahl korrierbarer Fehlermuster.

b) Stellen Sie für den systematischen (7,4,3)-Hamming-Codierer eine Tabelle auf, die alle Syndrome und die zugehörigen Nebenklassenanführer enthält.

c) Am Empfänger liege das Wort $\mathbf{y} = (1\,1\,0\,1\,0\,0\,1)$ an. Welches Informationswort $\mathbf{u}$ wurde mit größter Wahrscheinlichkeit gesendet?

d) Durch Umsortieren der Spalten von $\mathbf{H}$ kann die Suche der Position des Syndroms $\mathbf{s}$ in $\mathbf{H}$ entfallen. Die Dezimaldarstellung von $\mathbf{s}$ kann dann direkt zur Adressierung des Nebenklassenanführers verwendet werden. Geben Sie die entsprechende Prüfmatrix $\tilde{\mathbf{H}}$ an.

Aufgabe 21: **Generator- und Prüfmatrizen**

a) Geben Sie die Generator- als auch die Prüfmatrix für einen $(n, 1, n)$-Wiederholungscode mit $n = 4$ an. Welche Parameter und Eigenschaften hat der duale Code?

b) Die Spalten der Prüfmatrix eines Hamming-Codes der Ordnung r repräsentieren bekanntlich alle Dualzahlen von 1 bis $2^r - 1$. Geben Sie eine Prüfmatrix für $r = 3$ an und berechnen Sie die zugehörige Generatormatrix. Bestimmen Sie die Paramter des Codes und geben Sie die Coderate an.

c) Untersuchen Sie anhand dieses Beispiels, welcher Zusammenhang zwischen der Mindestdistanz eines Codes und der Anzahl linear unabhängiger Spalten der Prüfmatrix $\mathbf{H}$ steht?