**Universität Bremen**
Arbeitsbereich Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. A. Dekorsy

Schriftliche Prüfung im Fach

# Grundlagen der Nachrichtentechnik

Name: ______________________
Vorname: ______________________
Mat.-Nr.: ______________________
BSc. / Dipl.: ______________________

Zeit: 22. August 2018, 10.00 - 12.00 Uhr
Ort: NW 1, H 3
Umfang: 6 Aufgaben

| **Aufgabe:** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **gesamt** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punkte:** | ( 8 ) | ( 8 ) | ( 9 ) | ( 8 ) | ( 9 ) | ( 8 ) | **(50)** |
| **erzielt:** | | | | | | | |

**Hinweise:**

- Als Hilfsmittel ist nur ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt!
- Zum Bestehen der Klausur müssen von den erreichbaren 50 Punkten mindestens 20 Punkte erreicht werden!
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf *jedes* abgegebene Blatt.

**Aufgabe 1** (8 Punkte) (**Kurzfragen**)

Beantworten Sie die folgenden Fragen stichpunktartig. Beachten Sie, dass die Fragen unabhängig voneinander zu lösen sind.

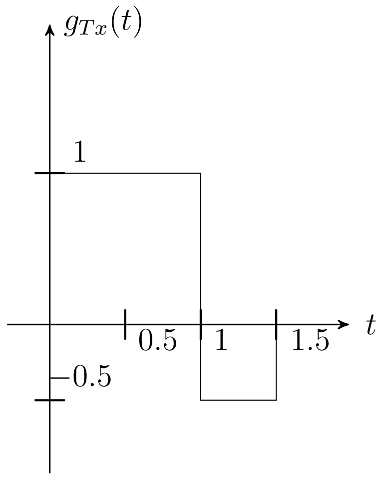
(a) Ein analoges Signal $v(t)$ wird durch

$$x(t) = a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} v(t)\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

auf einen Träger moduliert. Geben Sie die Modulationsart an. Wie lautet die Berechnungsvorschrift für eine reine Zweiseitenbandmodulation (ZSB).

(b) Im Folgenden wird ein analoges Signal $-1 \leq x(t) \leq 1$, dessen Werte gleichwahrscheinlich auftreten, quantisiert. Was wird als Quantisierungsrauschen bezeichnet und welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt diese Größe bei gleichmäßiger Quantisierung?

(c) Gegeben ist folgendes Sendefilter $g_{Tx}(t)$:




Zeichnen Sie das kausale Empfansfilter $g_{Rx}(t)$, welches die Matched Filter Bedingung erfüllt.

(d) Ein sinusförmiges Signal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ wird über einen nichtlinearen Kanal gesendet. Das Ausgangssignal $y(t) = f(x(t))$ lässt sich durch die Taylorreihe schreiben als

$$y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \sin(\nu \omega_0 t + \phi_\nu).$$

Geben Sie an, wie sich der Klirrfaktor $k$ der Nichtlinearität berechnen lässt und welche Werte $k$ annehmen kann.

Lösung:

(a) (2 Punkte) Amplitudenmodulation (AM), ZSB für

$$\lim_{a_0 \to 0} \Rightarrow x_{ZSB}(t) = a_1 v(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

(b) (2 Punkte) Fehler zwischen quantisiertem Wert und echtem/analogem Wert, Quantisierungsrauschen ist gleichverteilt (bei hinreichend feiner Quantisierung)

(c) (1 Punkt)

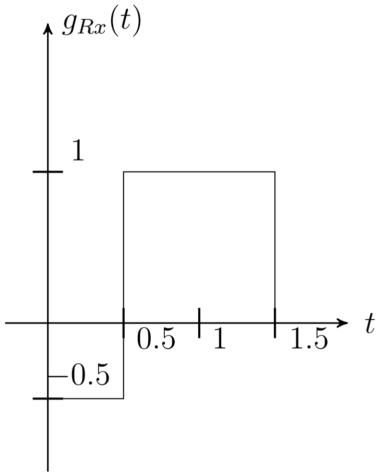


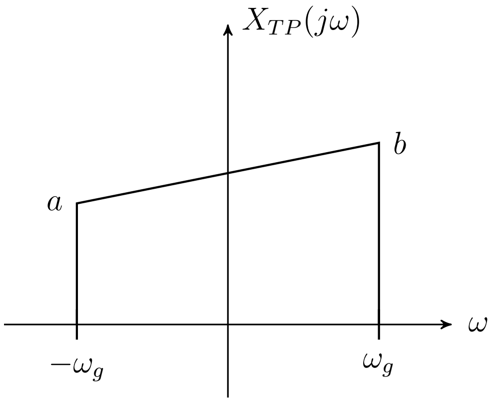

Abbildung 1: Impulsantwort $g_{Rx}(t)$ des Empfangsfilters

(d) (3 Punkte) $0 \leq k < 1$

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=2}^{\infty} |u_\nu|^2}}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_\nu|^2}}$$

**Aufgabe 2** (8 Punkte) (**Bandpass/Tiefpass-Signale**)

Gegeben ist das abgebildete *reellwertige* Spektrum eines Tiefpasssignals $X_{TP}(j\omega) \in \mathbb{R}$.




(a) Skizzieren Sie das Spektrum des zugehörigen, äquivalenten Bandpasssignals $X_{BP}(j\omega)$ und das Spektrum des zu $X_{BP}(j\omega)$ zugehörigen analytischen Signals $X_{BP}^{+}(j\omega)$ mit der Trägerfrequenz $\omega_0 > \omega_g$.

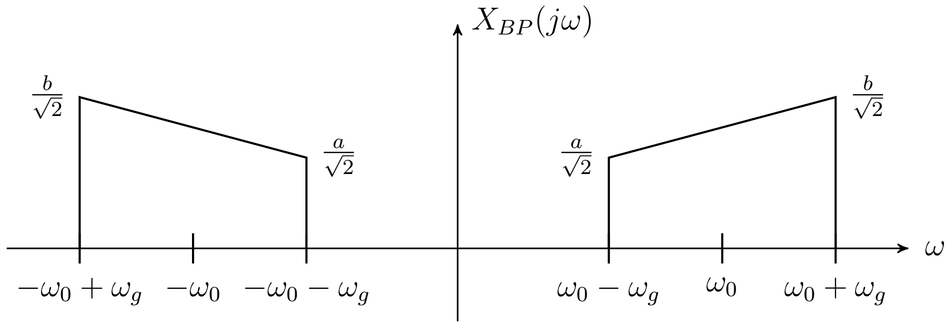
(b) Geben Sie die Eigenschaft reeller Zeitsignale im Frequenzbereich an und bestimmen Sie, ob die Zeitsignale $x_{TP}(t)$, $x_{BP}(t)$ und $x_{BP}^{+}(t)$ reel- oder komplexwertig sind.

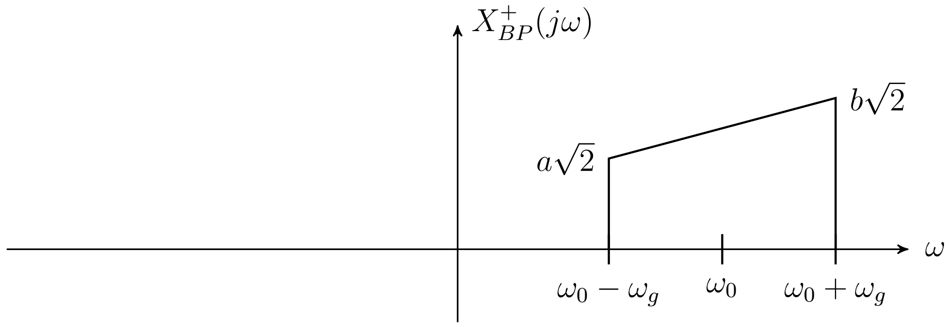
(c) Das Tiefpasssignal $x_{TP}(t)$ wird mit der Abtastfrequenz $\omega_A = 2.5\omega_g$ abgetastet. Skizzieren Sie das Spektrum des abgetasteten Signals $X_A(j\omega)$ in dem Bereich $-3.5\omega_g \leq \omega \leq 3.5\omega_g$ und geben Sie an wie das ursprüngliche Signal $x_{TP}(t)$ wieder rekonstruiert werden kann.

**Hinweis:** Achten Sie bei den Skizzen auf eine korrekte Achsenbeschriftung

Lösung:

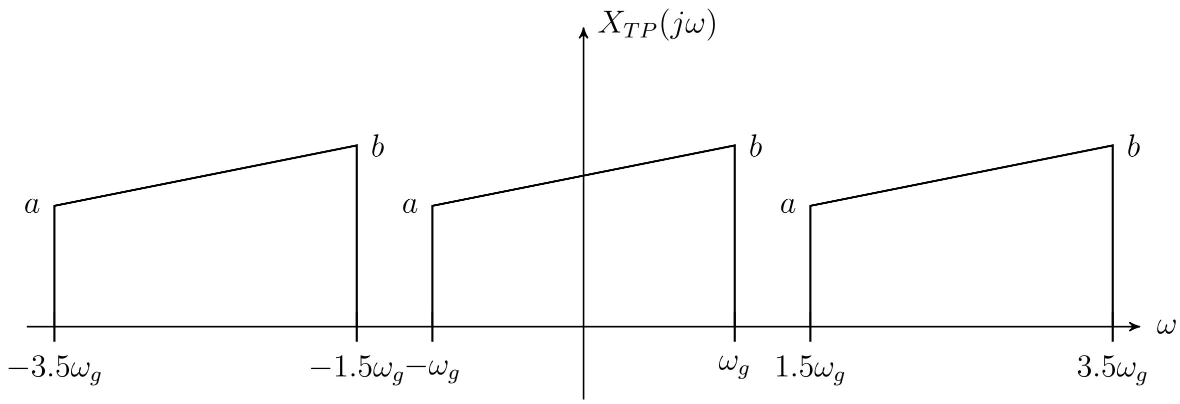
(a) (3 Punkte)




(b) reelles Zeitsignal $\rightarrow$ konjugiert gerades Spektrum
$\Rightarrow x_{TP}(t)$ und $x_{BP}^{+}(t)$ komplex, $x_{BP}(t)$ reell (3 Punkte)

(c) Rekonstruktion mit Tiefpass der Grenzfrequenz $\omega_g < \omega_{TP} < 1.5\omega_g$(2 Punkte)



**Aufgabe 3** (9 Punkte) (**Nyquistbedingung**)

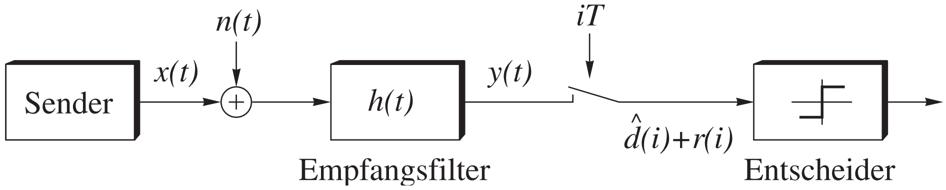
Ein sinusförmiges Signal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ wird übertragen. Auf dem Übertragungsweg wird weißes, gaußverteiltes Rauschen $n(t)$ mit einer spektralen Leistungsdichte

$$S_{nn}(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Hz}^{-1} \text{ für } -\infty < \omega < \infty$$

überlagert. Am Empfänger erfolgt eine Filterung mit der Impulsantwort

$$h(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \mathrm{si}(\omega_g t)$$

und eine Abtastung im Symboltakt, wie es in der folgenden Abbildung gezeigt ist. Zudem gilt $\omega_0 < \omega_g$.




(a) Warum lässt sich $h(t)$ praktisch nicht realisieren?

(b) Geben Sie begründet an, ob die erste Nyquistbedingung erfüllt ist und mit welcher Symbolrate $1/T$ verzerrungsfrei übertragen werden kann. Skizzieren Sie dafür zunächst die Impulsantwort $h(t)$ im Bereich $-4\frac{\pi}{\omega_g} \leq t \leq 4\frac{\pi}{\omega_g}$.

(c) Zeichnen Sie die Übertragunsfunktion $H(j\omega)$ des Empfangsfilters und nennen Sie das Filter, welches durch $h(t)$ beschrieben wird.

(d) Berechnen Sie die Rauschleistung $\sigma_n^2$ am Ausgang des Empfangsfilters und geben Sie das SNR in dB nach der Abtastung für $\omega_g = \pi \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$ an.

(e) Geben Sie das SNR an, wenn $\omega_0 > \omega_g$ gelten würde.

**Hinweis:**
Siehe Anhang

Lösung:

(a) Unendlich lange Impulsantwort, (nicht kausal) (1 Punkt)

(b) Erste Nyquistbedingung erfüllt, da äquidistante Nullstellen.
Verzerrungsfreie Übertragung für $\frac{1}{T} = \frac{\omega_g}{\pi} = 2f_g$ (2 Punkte)

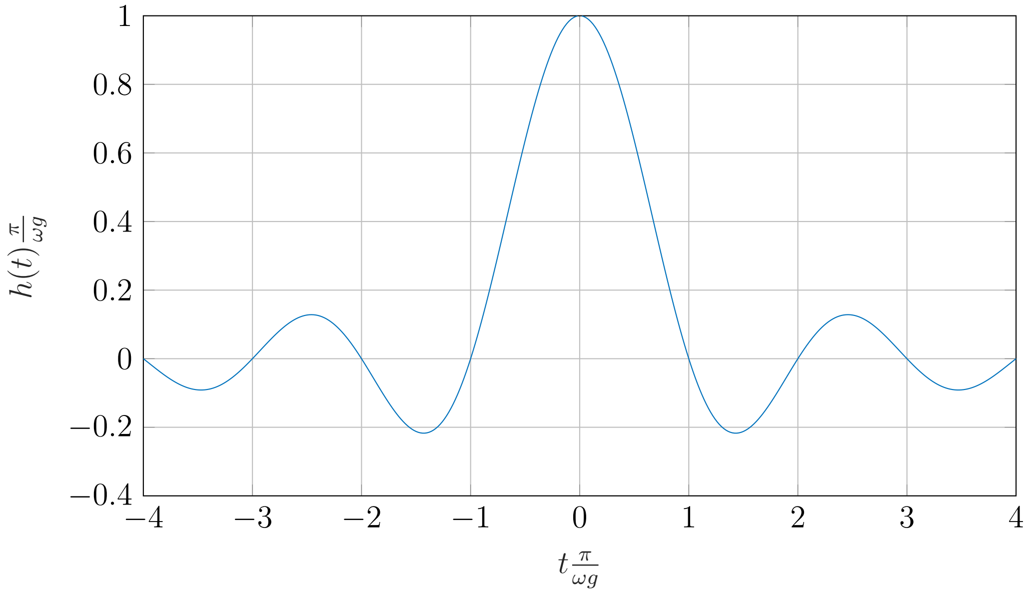



Abbildung 2: Impulsantwort eines ideal Tiefpasses

(c) (idealer) Tiefpassfilter (2 Punkte)

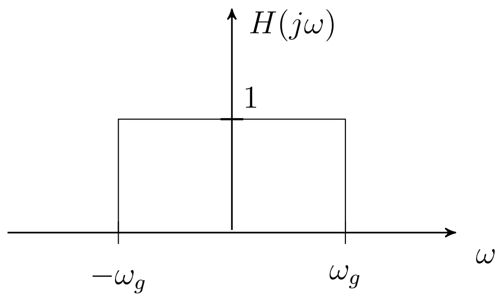



Abbildung 3: Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpasses

(d) (3 Punkte)

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(j\omega)|H(j\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{20}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{SNR}|_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) = 10\,\mathrm{dB}$$

(e) $\mathrm{SNR} = 0 \mathrel{\widehat{=}} -\infty$ dB (1 Punkt)

**Aufgabe 4** (8 Punkte) (**Differentielle Modulation**)

Gegeben ist eine DQPSK-Modulation mit $\lambda = \pi/4$. Die gesendeten Bit-Tupel sollen durch Tabelle 1 auf folgende Phasendifferenzen abgebildet werden.

| Bitfolge | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Phasendrehung | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{4}$ |

Tabelle 1: Gray-Codierung der DQPSK

(a) Es soll folgende Bitfolge gesendet werden: 11 00 01 11 10 01.
Geben Sie die Folge der absoluten Phasenwerte $\varphi(i)$ des Sendesignals an. Der Anfangswert der Phase sei $\varphi(-1) = 0$.

(b) Am Empfänger ergibt sich zum Zeitpunkt $i = 2$ ein Phasenfehler: $\hat{\varphi}(2) = -\frac{1}{4}\pi$. Geben Sie die Bitfolge nach der differentiellen Demodulation an.

(c) Beschreiben Sie Vor- und Nachteile der Benutzung der DQPSK im Vergleich zur 8-PSK, die die gleichen Symbole benutzt.

Lösung:

(a) (2 Punkte)

| $\varphi(0)$ | $\varphi(1)$ | $\varphi(2)$ | $\varphi(3)$ | $\varphi(4)$ | $\varphi(5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | 0 |

(b) (2 Punkte)

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(i)$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{6}{4}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{6}{4}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | 0 |
| $\Delta\varphi(i)$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ |
| Bits | 11 | 00 | 00 | 10 | 10 | 01 |

(c) Vorteile: Keine Phasensynchronisation nötig (inkohärenter Empfänger), da Information nur in Phasendifferenz; Größerer Störabstand zwischen den Symbolen zu einem Zeitpunkt

Nachteile: Weniger Bits pro Symbol (8-PSK: 3 Bits, DQPSK: 2 Bits); Falsche Phasendetektion führt zu zwei Symbolfehlern (4 Punkte)

**Aufgabe 5** (9 Punkte) (**Bitfehlerwahrscheinlichkeit**)

Es werden BPSK Symbole $d \in \{\pm 1\}$ mit $Pr(d = -1) = 0.6$ und $Pr(d = 1) = 0.4$ über einen AWGN Kanal gesendet, sodass am Empfänger zum Abtastzeitpunkt $i$ das Signal

$$y(i) = d(i) + n(i)$$

vorliegt. Das Rauschen $n$ besitzt die dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_N(n)$.

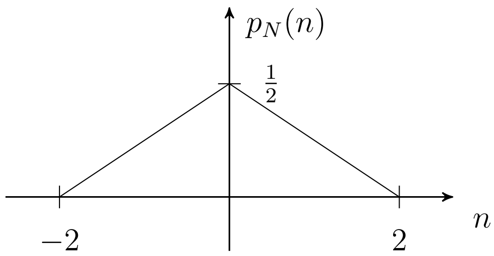



Abbildung 4: Verteilungsdichtefunktion $p_N(n)$.

(a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Sendesignals $p_D(d)$ und berechnen Sie die Entropie der Quelle $H(D) = \mathrm{E}\{-\log_2 Pr(D)\}$. Geben Sie das Sendesymbol $d \in \{-1, +1\}$ mit dem höheren Informationsgehalt an und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des gesamten Empfangssignals $p_Y(y)$ und berechnen Sie die Position des optimalen Schwellwertes $S_{opt}$.

(c) Berechnen Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P_e$ bei optimaler Entscheidungsschwelle $S = S_{opt}$
(Wenn Aufgabe (b) nicht gelöst worden ist, kann für die Entscheidungsschwelle $S = 0$ angenommen werden.)

**Hinweis:** Achten Sie bei den Skizzen auf eine korrekte Achsenbeschriftung

Lösung:

(a) $H(D) \approx 0.971$
$d = 1$ besitzt höheren Informationsgehalt, da geringere Auftrittswahrscheinlichkeit.
(3 Punkte)

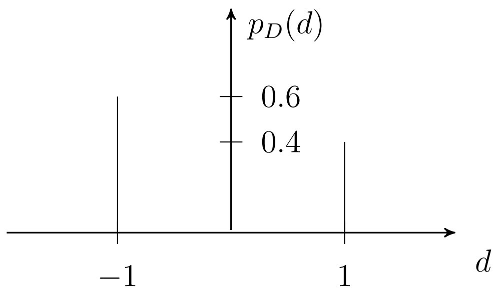



Abbildung 5: Wahrscheinlichkeitsfunktion des Sendesignals $p_D(d)$

(b) $S_{opt} = 0.2$ (3 Punkte)

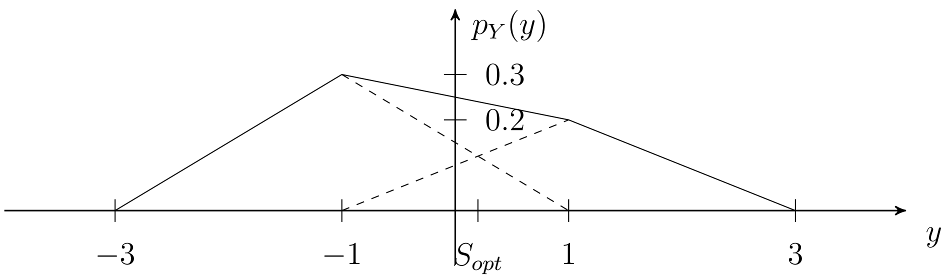



Abbildung 6: Verteilungsdichtefunktion $p_Y(y)$

(c) $P_e = Pr(d(i) = -1) \int_S^\infty p_{Y|d=-1}(y)\mathrm{d}y + Pr(d(i) = 1) \int_{-\infty}^S p_{Y|d=1}(y)\mathrm{d}y = 0.12$
(3 Punkte)

**Aufgabe 6** (8 Punkte) (**Codierung**)

Gegeben sei ein Wiederholungscode der Länge $n$.

(a) Geben Sie die Anzahl an Informationsbits $k$ und die minimale Hamming-Distanz $d_{\min}$ in Abhängigkeit von $n$ an.

(b) Bestimmen Sie die minimale Anzahl an Codebits $n$ und die dazugehörige Coderate $R_C$, damit zwei Fehler korrigiert werden können.

Im Folgenden sei $n = 4$.

(c) Geben Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ und die Prüfmatrix $\mathbf{H}$ für den gegebenen Code an.

(d) Am Empfänger liegt nun der Vektor $\mathbf{y} = [1101]$ vor. Geben Sie den wahrscheinlichsten Sendevektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ und das zugehörige Informationswort $\mathbf{u}$ an, wenn $\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e}$ mit $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4]$ als Fehlervektor und $x_i, y_i, e_i, u \in \mathrm{GF}(2)$ gilt.

Lösung:

(a) $k = 1$, $d_{\min} = n$ (2 Punkte)

(b) $n = 5$, $R_C = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ (2 Punkte)

(c) $\mathbf{G} = [1111]$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2 Punkte)

(d) $\mathbf{x} = [1111]$, $\mathbf{u} = 1$ (2 Punkte)

# Anhang

## Hinweise zur Fourier-Transformation

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \\
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega \\
e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta_0(\omega - \omega_0) \\
x_1(t) \cdot x_2(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \\
\mathrm{si}(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\omega_0}) \\
\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\omega_0}) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathrm{si}(\omega_0 t) &= \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t} \\
\Omega &= \omega T_\mathrm{A} = 2\pi f T_\mathrm{A} \\
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega
\end{aligned}
$$