

Versuchsbeschreibungen  
**Grundlagenlabor Nachrichtentechnik**  
– WS 2019/2020 –

**Dr. Dirk Wübben**

NW1, Raum N2380, Tel.: 0421/218-62385

E-mail: [wuebben@ant.uni-bremen.de](mailto:wuebben@ant.uni-bremen.de)



Universität Bremen, FB1  
Institut für Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik  
Arbeitsbereich Nachrichtentechnik  
Prof. Dr.-Ing. A. Dekorsy  
Postfach 33 04 40  
D-28334 Bremen

WWW-Server: <http://www.ant.uni-bremen.de>

October 30, 2019



# Vorbemerkungen

In dem *Grundlagenlabor Nachrichtentechnik* sollen die Inhalte der Vorlesung *Grundlagen der Nachrichtentechnik* anhand praktischer Beispiele, Übungen und Messungen vertieft werden. Begleitend zu den Vorlesungen werden hierzu insgesamt sechs Laborversuche durchgeführt, welche aufeinander aufbauen.

Zur Vorbereitung auf den jeweiligen Versuch ist das entsprechende Kapitel dieser Versuchsbeschreibung zu bearbeiten und der zugehörige Stoff der Vorlesung zu wiederholen. Verweise auf theoretische Grundlagen beziehen dabei auf die Folien zur Vorlesung "Grundlagen der Nachrichtentechnik" (<http://www.ant.uni-bremen.de/courses/gnt/>) bzw. auf das Lehrbuch "*Nachrichtenübertragung*" von K.D. Kammeyer, 4. Auflage 2008, Teubner Verlag, Stuttgart, 2008. Zu jedem Versuch sind Vorbereitungsaufgaben angegeben. Diese sind vor der Versuchsdurchführung von jedem Teilnehmer so vorzubereiten, dass diese im Plenum erläutert werden können.

Im Gegensatz zu der bisherigen Durchführung des Labors findet zu Beginn des Labors kein Kolloquium mehr statt und ebenso entfällt die Ausarbeitung eines Protokolls. Im Vordergrund steht vielmehr die praktische Anwendung der theoretischen Grundlagen und die selbständige Lösung von Aufgaben und Problemen. Dies setzt jedoch die gute Vorbereitung voraus, da nur so eine sinnvolle Durchführung der Versuche möglich ist. Im Rahmen des Praktikums sollen dann die unterschiedlichen Strategien zur Problemlösung vorgestellt und diskutiert werden.

Ein Schwerpunkt des Grundlagenlabors stellt das Programm Matlab (MATrix-LABoratory) dar. Es ist ein sehr vielseitiges und doch einfach zu erlernendes Werkzeug zur Erstellung mathematischer Berechnungen. Es zeichnet sich insbesondere durch eine sehr einfache Programm-Syntax und einer Vielzahl an Möglichkeiten zur grafischen Darstellung von Daten aus. Den Teilnehmer am Grundlagenlabor wird eine Studentenversion von Matlab für Windows mit vollem Funktionsumfang zu Beginn des Labors zur Verfügung gestellt, so dass die in dem Skript angegebenen Vorbereitungsaufgaben zu Hause erstellt werden können. Im Rahmen der Vorbesprechung erfolgt eine Einführung in die wesentlichen Grundlagen von Matlab. Eine Einleitung zum Programmaufruf unter Linux (das Labor wird unter Linux durchgeführt), eine Übersicht zu den wichtigsten Befehlen und eine Auflistung von weiterführenden Einführungen finden sich in dem Anhang dieses Skriptes.

Kann ein Versuch wegen Krankheit nicht durchgeführt werden, so ist schnellstmöglich der entsprechende Betreuer zu kontaktieren und nach Möglichkeit der Versuch nachzuholen. Bei mehrfachem Fehlen oder wiederholt unzureichender Vorbereitung ist das gesamte Praktikum im nächsten Jahr zu wiederholen.

# Contents

<b>1</b>	<b>Signale</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung und Vorbereitung . . . . .	1
1.1.1	Simulation kontinuierlicher Signale auf einem PC . . . . .	1
1.1.2	Zeitdiskrete Signale . . . . .	2
1.1.3	Vorbereitungsaufgabe . . . . .	4
1.2	Versuchsdurchführung . . . . .	5
1.2.1	Erzeugung von Signalen . . . . .	5
1.2.2	Der Fourier-Transformation . . . . .	6
1.2.3	Zeitdiskrete Signale . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Lineare Systeme</b>	<b>9</b>
2.1	Einführung . . . . .	9
2.2	Vorbereitung . . . . .	9
2.3	Hilbert-Transformation . . . . .	10
2.3.1	Vorbereitungsaufgabe . . . . .	10
2.4	Analytische Signale . . . . .	11
2.4.1	AUFGABE . . . . .	11
2.5	Demodulation und Tiefpass-Filterung . . . . .	12
2.6	Quadraturmischer . . . . .	12
2.7	Äquivalentes Basisbandmodell . . . . .	13
2.7.1	Direkte Übertragung . . . . .	13
2.7.2	Äquivalentes Kanalmodell . . . . .	14
<b>3</b>	<b>UKW-Radio</b>	<b>16</b>
3.1	Einführung . . . . .	16
3.1.1	Beschreibung der Simulationsumgebung . . . . .	17

---

3.1.2	Stereo-Multiplex . . . . .	18
3.2	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	19
3.3	Versuchsdurchführung . . . . .	21
3.3.1	Matlab: Simulation eines UKW-Empfängers . . . . .	21
3.3.2	Messung an einem UKW-Empfänger . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Diskrete Signale und Systeme</b>	<b>26</b>
4.1	Motivation . . . . .	26
4.2	Elementare zeitdiskrete Signale . . . . .	27
4.3	Transformationen zeitdiskreter Signale . . . . .	27
4.3.1	Zeitdiskrete Fourier-Transformation . . . . .	27
4.3.2	z-Transformation . . . . .	27
4.4	Zeitdiskrete Systeme . . . . .	29
4.4.1	Eigenschaften . . . . .	29
4.4.2	Frequenzgang . . . . .	31
4.4.3	Systemfunktion und Differenzgleichung . . . . .	32
4.4.4	übersicht . . . . .	33
4.5	Zeitdiskrete Zufallsprozesse . . . . .	34
4.5.1	Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Verteilungsdichtefunktion . . . . .	34
4.5.2	Statistische Kenngrößen (Momente von Verteilungen) . . . . .	36
4.5.3	Statistische Unabhängigkeit, Summation und zentraler Grenzwertsatz . . . . .	37
4.5.4	Zufallsprozesse und ihre Kenngrößen . . . . .	38
4.5.5	Spektrale Darstellung zeitdiskreter stochastischer Prozesse . . . . .	41
4.6	Zeitdiskrete Zufallsprozesse und zeitdiskrete LTI-Systeme . . . . .	41
4.6.1	Korrelationsfolgen und Leistungsdichtespektren des Ausgangsprozesses . . . . .	41
4.6.2	Systemidentifikation . . . . .	42
4.7	Versuchsdurchführung . . . . .	42
4.7.1	Vorbemerkungen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Digitale Funkübertragung</b>	<b>51</b>
5.1	Einführung . . . . .	51
5.1.1	Vor- und Nachbereitung des Versuchs . . . . .	52
5.1.2	Motivation . . . . .	53

5.1.3	Theoretische Grundlagen . . . . .	54
5.1.4	Die Hardware . . . . .	55
5.2	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	56
5.3	Versuchsdurchführung . . . . .	60
5.3.1	Übertragungsstrecke unter SIMULINK <sup>®</sup> . . . . .	60
5.3.2	Messungen mit der realen Übertragungsstrecke . . . . .	62
5.3.3	Übertragung mit der realen Übertragungsstrecke . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Codierung</b>	<b>63</b>
6.1	Einführung . . . . .	63
6.1.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	63
6.2	Vorbereitungsaufgaben . . . . .	67
6.2.1	Quellencodierung . . . . .	67
6.2.2	Fehlerkorrektur . . . . .	68
6.3	Versuchsdurchführung . . . . .	68
6.3.1	Kanalcodierung . . . . .	68
6.3.2	Decodierung und Fehlerkorrektur . . . . .	69
6.3.3	Bitfehlerrate über BSC . . . . .	69
6.3.4	Bitfehlerrate mit BPSK über AWGN Kanal . . . . .	70
6.3.5	Bitfehlerrate mit QPSK über AWGN Kanal . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Einleitung zu Matlab</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Übersicht zu den Befehlen</b>	<b>74</b>

---

# Chapter 1

## Signale

**Shengdi Wang**

NW1, Raum N2380, Tel.: 0421/218-62402

E-Mail: wang@ant.uni-bremen.de

### 1.1 Einführung und Vorbereitung

In diesem Versuch soll ein Überblick über die in der Vorlesung *Grundlagen der Nachrichtentechnik* verwendeten Elementarsignale im Zeit- und Frequenzbereich gegeben werden. Weiterhin sollen die Korrespondenzen der Fouriertransformation und die Verarbeitung kontinuierlicher Signale auf einem Digitalrechner erlernt werden.

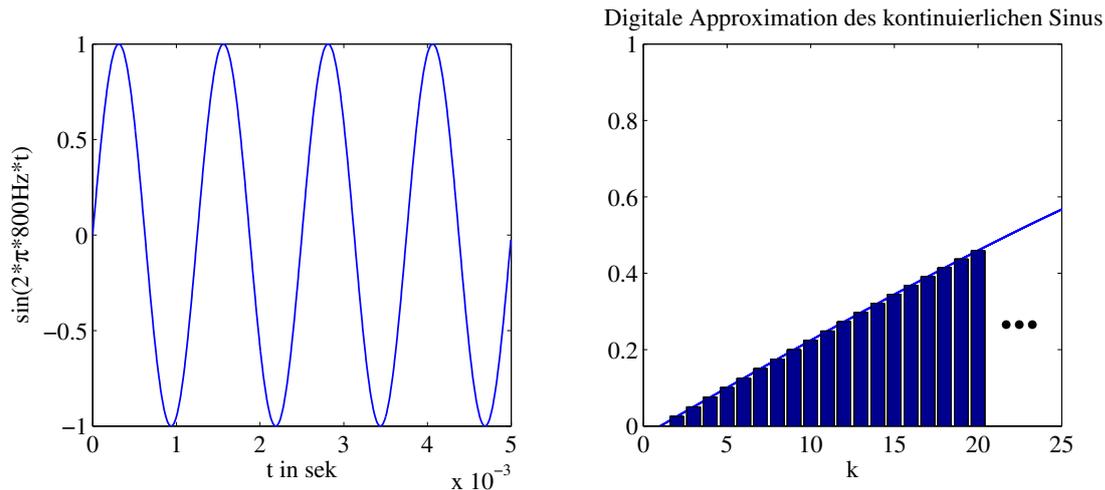
Für die Durchführung dieses Versuchs wird die Kenntnis des in den Folien zur Vorlesung Grundlagen der Nachrichtentechnik behandelten Stoffes vorausgesetzt, die unter <http://www.ant.uni-bremen.de/courses/gnt/> heruntergeladen werden können.

#### 1.1.1 Simulation kontinuierlicher Signale auf einem PC

Bei Verwendung eines digitalen Systems, wie z.B. eines PC stellt sich zwangsläufig das Problem der Darstellung und Verarbeitung von kontinuierlichen Signalen im Zeit- oder Frequenzbereich. Daher soll im Folgenden kurz auf die Signalverarbeitung unter MATLAB eingegangen werden.

Bild 1.1 soll die Verarbeitung eines zeitkontinuierlichen Signals in MATLAB mittels Annäherung durch eine Rechteck-Treppenfunktion verdeutlichen. Der zeitkontinuierliche Sinus  $s(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 0.8\text{kHz} \cdot t)$  für  $0 \leq t < 5\text{ms}$  geht also bei einer Abtastung mit 200 Werten pro Millisekunde (d.h. das Abtastintervall  $\Delta T$  beträgt 1/200 Millisekunden) über in die Folge  $s = [0, 0.0251, 0.0502, 0.0753, 0.1004, \dots]^T$ . Die ersten 20 Werte dieser Folge sind in Bild 1.1 (rechts) abzulesen. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Grundeinheiten im Weiteren in Millisekunden bzw. kHz angegeben werden. Sollte davon abgewichen werden, wird an geeigneter Stelle gesondert darauf hingewiesen.

Für die Darstellung 'quasikontinuierlicher' Zeitsignale muss ein Zeitvektor (z.B.  $t = 0 : \Delta T : t_{max} - \Delta T$  bzw.  $\tau=0:1/200:5-1/200$ ; für einen Vektor der Länge 5 ms) mit sehr kleinem Abtastintervall erzeugt werden.



**Figure 1.1:** Abtastung eines kontinuierlichen Zeitsignals mit Stützstellen der Breite  $\Delta T$

## 1.1.2 Zeitdiskrete Signale

### Elementare zeitdiskrete Signale

Zeitdiskrete Signale entstehen durch das Abtasten von zeitkontinuierlichen Signalen. Die Abtastung kann dabei zu äquidistanten oder auch zufälligen Zeitpunkten erfolgen. Für die hier betrachteten Signale wird grundsätzlich von einer äquidistanten Abtastung ausgegangen. Im weiteren wird angenommen, dass aus dem zeitdiskreten Signal das kontinuierliche Signal wieder eindeutig rekonstruierbar ist, d.h. dass das Abtasttheorem eingehalten wird.

Mathematisch werden zeitdiskrete Signale als Folgen von Zahlen dargestellt, wobei als Schreibweise

$$x_K(t)|_{t=kT_A} = x_K(kT_A) =: x(k) \quad (1.1)$$

verwendet wird. Dabei bezeichnet  $x_K(t)$  das kontinuierliche Signal,  $x(k)$  die Zahlenfolge,  $T_A = 1/f_A =: T$  das Abtastintervall,  $f_A$  die Abtastfrequenz und  $k$  eine ganze Zahl im Bereich  $-\infty < k < \infty$ . Das Signal  $x_K(t)$  bzw. die Zahlenfolge  $x(k)$  kann dabei sowohl reellwertig als auch komplexwertig sein.

Bei der Besprechung der Theorie von zeitdiskreten Systemen und Signalen spielen einige grundlegende Zahlenfolgen eine wichtige Rolle.

Man unterscheidet u.a.

- die Impulsfolge

$$x(k) = \delta(k) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

- die Sprungfolge

$$x(k) = \varepsilon(k) := \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

- und die komplexe Exponentialfolge

$$x(k) = e^{j\omega T k} = e^{j\Omega k}. \quad (1.4)$$

Dabei beschreibt  $\Omega$  die auf die Abtastfrequenz  $f_A = 1/T$  normierte Kreisfrequenz, für die

$$\Omega = \frac{\omega}{f_A} = \omega T \quad (1.5)$$

gilt.

Weiterhin kann unter Verwendung der Ausblendeigenschaft der Impulsfolge  $\delta(k)$  nach Gl.(1.2) jede Folge durch

$$x(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \cdot \delta(k-i) \quad (1.6)$$

beschrieben werden. Hierbei ist zu beachten, dass  $x(i)$  einen einzigen Amplitudenwert und  $x(k)$  das gesamte Zeitsignal beschreibt.

### Zeitdiskrete Fourier-Transformation

Analog zur Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale kann auch eine Fourier-Transformation von Zahlenfolgen angegeben werden. Die so genannte zeitdiskrete Fourier-Transformation einer Folge  $x(k)$  und die zugehörige Rücktransformation sind definiert als:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\Omega k} \\ x(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Unter Verwendung der Definitionen Gl.(1.7) können nun folgende elementare Aussagen getroffen werden:

1.  $X(e^{j\Omega})$  ist eine frequenzkontinuierliche Funktion, also keine Zahlenfolge
2. Da die Eigenschaft

$$e^{-j(\Omega \pm 2\pi)k} = e^{-j\Omega k} \quad (1.8)$$

gilt und  $k$  ganzzahlig ist, ist die Fourier-Transformierte  $X(e^{j\Omega})$  periodisch in  $2\pi$ .

Für viele Anwendungen ist entscheidend, dass aus dem zeitdiskreten Signal das ursprüngliche kontinuierliche Signal wieder zurückgewonnen werden kann. Um dies zu ermöglichen muss die Abtastfrequenz so gewählt werden, dass das Abtasttheorem eingehalten wird. Im folgenden soll dieses für die digitale Signalverarbeitung entscheidende Theorem kurz erläutert werden.

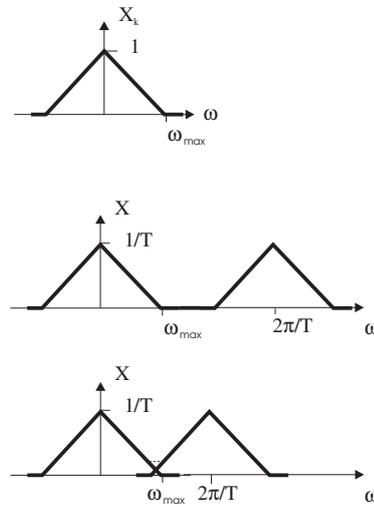
Ausgehend von einem zeitkontinuierlichen Signal  $x_K(t)$  und den Beziehungen der Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_K(t)\} = X_K(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_K(t) e^{-j\omega t} dt \\ \mathcal{F}^{-1}\{X_K(j\omega)\} = x_K(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1.9)$$

erhält man durch Abtastung mit der Abtastfrequenz  $f_A$  die Zahlenfolge  $x(k)$  und das durch Gl.(1.7) gegebene Transformationspaar. Es kann nun gezeigt werden dass die Spektren  $X_K(j\omega)$  und  $X(e^{j\Omega})$  durch die Beziehung

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_K(e^{j(\Omega+i2\pi)/T}) \quad (1.10)$$

verknüpft sind. Daraus folgt, dass sich das Spektrum diskreter Signale  $X(e^{j\Omega})$  aus der Überlagerung der um  $2\pi$  verschobenen und auf  $1/T$  normierten Spektren des kontinuierlichen Signals ergibt. Ein Beispiel zeigt Bild 1.2.



**Figure 1.2:** Spektren eines zeitkontinuierlichen Signals und zweier durch verschiedene Abtastfrequenzen daraus gewonnener zeitdiskreter Signale

Soll nun aus dem zeitdiskreten Signal das zeitkontinuierliche vollständig rekonstruierbar sein, so dürfen sich die Teilspektren  $X_K(e^{j(\Omega+i2\pi)/T})$  nicht überlappen was andernfalls aus dem Englischen kommend als *aliasing* bezeichnet wird. Somit ergeben sich folgende Forderungen, die als Abtasttheorem bekannt sind:

- $X_K(j\omega)$  muss bandbegrenzt sein, also im Frequenzbereich  $|\omega| \geq \omega_{max}$  identisch verschwinden
- die Abtastfrequenz  $\omega_A = 2\pi f_A = 2\pi/T$  muss mindestens doppelt so groß wie die maximale Frequenz  $\omega_{max}$  von  $X_K(j\omega)$  gewählt werden.

Auf das Problem der Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals soll im Rahmen dieses Versuchs nicht eingegangen werden. Hierzu sei auf die Literatur verwiesen.

### 1.1.3 Vorbereitungsaufgabe

Generieren Sie mit MATLAB ein Sinussignal und den zugehörigen Zeitvektor  $\mathbf{t}$  mit einem Abtastintervall  $\Delta T = 1/200\text{ms}$  und bringen Sie sowohl den geschriebenen Code, als auch einen Ausdruck des generierten Signals zum Versuch mit. Der erzeugte Sinus soll folgende Anforderungen erfüllen:

- Frequenz 0.8 kHz
- Amplitude 2.5
- Länge 10 ms

Verwenden Sie bei Problemen die MATLAB-Hilfe (`help`) und das Internet. Sollten sich weitere Probleme ergeben, kontaktieren Sie **vor dem Versuchstermin** den zuständigen Betreuer.

Machen Sie sich weiterhin mit folgenden Befehlen vertraut, indem Sie die Hilfe lesen (`help <Befehl>` oder `doc <Befehl>`), da sie für die Durchführung dieses Versuches benötigt werden:

`help,doc, plot, subplot, xlabel, ylabel, title, size, length, plot_zeitsignal1, bar_spektrum1, f_trafo1, f_reihe1, read_sound1, play_sound1, faltung1, ableitung1.`

Für die Durchführung des Versuchsteils "Diskrete Signale" werden zudem die Funktionen `erste_d1, imp_per1, cos_abt1` und `si1` benötigt.

## 1.2 Versuchsdurchführung

### 1.2.1 Erzeugung von Signalen

Erzeugen Sie

- einen Sinus  $s_1(t_1) = \sin(2\pi f t_1)$
- einen Cosinus  $s_2(t_1) = \cos(2\pi f t_1)$
- einen quadrierten Sinus  $s_3(t_1) = \sin^2(2\pi f t_1)$
- eine Exponentialschwingung  $s_4(t_1) = e^{j2\pi \cdot f t_1}$
- eine Rechteckfolge  $s_5(t_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- einen Impuls  $s_6(t_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_2 = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- einen Si-Impuls  $s_7(t_2) = \frac{\sin(2\pi f t_2)}{2\pi f t_2}$
- einen Gauß-Impuls  $s_8(t_2) = e^{-|a|t_2^2}$
- ein Multisinus-Signal  $s_9(t_1) = 0.25 \cdot \sin(2\pi f_1 t_1) + 0.5 \cdot \sin(2\pi f_2 t_1) + 0.25 \cdot \sin(2\pi f_3 t_1)$  mit  $f_1 = 0.8\text{kHz}$ ,  $f_2 = 1.6\text{kHz}$  und  $f_3 = 2.4\text{kHz}$
- ein Zufallssignal  $s_{10}(t_1) = \text{randn}(\text{size}(t_1))$

Die ansonsten benötigten Parameter lauten:  $f = 0.8\text{kHz}$ ,  $0 \leq t_1 < 20\text{ms}$ ,  $-20\text{ms} \leq t_2 < 20\text{ms}$ ,  $T = 4\text{ms}$  und  $\alpha = 1$ . Dabei soll das Abtastintervall  $\Delta T = 1/200\text{ms}$  betragen.

Die erzeugten Signale können mit Hilfe des Befehls `play_sound(t,x,laenge_in_sec)` über den Kopfhörer wiedergegeben werden.

---

<sup>1</sup>Diese Befehle gehören nicht zum Standardbefehlssatz von MATLAB, sondern sind ANT-spezifisch, d.h., sie sind nicht im MATLAB-Lieferumfang, sondern müssen vor Benutzung von der ANT-Webseite heruntergeladen werden.

## 1.2.2 Der Fourier-Transformation

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten der in Abschnitt 1.2.1 berechneten Zeitsignale  $s_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}$ ,  $i = 1..10$  und stellen Sie sie mit einem geeigneten Befehl grafisch dar. Benutzen Sie für die Fourier-Transformation periodischer Signale den Befehl `[f,S]=f_reihe(t,s)` und für nichtperiodische Signale den Befehl `[f,S]=f_trafo(t,s)`.

### Linearität der Fourier-Transformation

Transformieren Sie die drei überlagerten Sinuskomponenten von  $s_9(t_1)$  einzeln in den Frequenzbereich und addieren Sie die Spektren. Ergeben sich Unterschiede zum Spektrum  $S_9(f)$ ?

### Konjugiert gerade Spektren reeller Zeitsignale

Welche der dargestellten Spektren weisen eine konjugiert gerade Symmetrie auf, d.h. ihr Realteil hat eine Achsensymmetrie zur y-Achse und ihr Imaginärteil eine Punktsymmetrie zum Nullpunkt. Welche Eigenschaft besitzen all diese Signale im Zeitbereich?

### Verzögerung im Zeitbereich und Verschiebung im Frequenzbereich (Modulation)

Multiplizieren Sie das erzeugte Multisinussignal  $s_9(t_1)$  mit der Exponentialschwingung  $s_4(t_1)$ . Dieser Vorgang wird in der Nachrichtentechnik als Modulation bezeichnet. Welche Auswirkungen sind im Spektralbereich zu beobachten. Erhöhen Sie die Frequenz der Exponentialschwingung um einen Faktor 5 und wiederholen Sie die Multiplikation im Zeitbereich. Was beobachten Sie im Frequenzbereich?

Verschieben Sie den erzeugten Gaußimpuls derart, dass sein Mittelpunkt bei 5 ms liegt ( $s_8(t_2 - 5ms)$ ) und stellen Sie ihn im Zeit und Frequenzbereich dar. Welche Auswirkungen sind zu beobachten?

### Faltung und Multiplikation

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Faltung im Zeitbereich in eine Multiplikation im Frequenzbereich übergeht und umgekehrt. Zur Faltung in MATLAB steht die Funktion `[ty,y]=faltung(t1,x1,t2,x2)` zur Verfügung.

Falten Sie zwei Rechteckfunktionen (z.B.  $s_5(t_2)$ ) und betrachten Sie das Ergebnis im Zeit- und Frequenzbereich.

Welche Aussage können Sie treffen?

### Differentiation und Integration

Die Ableitung im Zeitbereich bewirkt eine Multiplikation im Frequenzbereich mit  $j\omega$  (siehe Folien zur Vorlesung). Dies entspricht einer Hochpassfilterung, wie in Bild 1.3 (links) verdeutlicht.

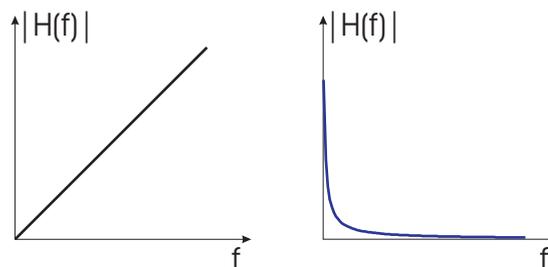


Figure 1.3: Übertragungsfunktion der Ableitung und Integration

Laden Sie eine beliebige WAVE-Datei von der Festplatte (z.B. `[t,x]=read_sound('imbissdeutsch')`) und leiten diese ab. Dazu steht der Befehl `y=ableitung(t,x)` zur Verfügung. Achten Sie darauf, dass das Soundbeispiel nicht zu lang ist, da die Ableitung sonst sehr viel Zeit beansprucht. Beim Beispiel *imbissdeutsch* sollten sie die Länge vor der Ableitung durch `x=x(1:5*44100,1)` und dementsprechend auch `t=t(1:5*44100,1)` auf die ersten 5 Sekunden und den linken Kanal begrenzen.

Hören Sie sich das Soundbeispiel vor und nach der Ableitung mit Hilfe des Befehls `play_sound(t,x,5);` an.

Die Integration entspricht einer Multiplikation mit  $1/j\Omega$  und somit einer Tiefpassfilterung (siehe Bild 1.3 (rechts)). Verwenden Sie den Befehl `y=integral(t,x)` und hören Sie sich das Ergebnis ebenfalls an.

### 1.2.3 Zeitdiskrete Signale

**Impulsfolge, Sprungfolge** Aus der Systemtheorievorlesung ist bekannt, dass im zeitkontinuierlichen Fall die Deltafunktion  $\delta(t)$  und die Einheitssprungfunktion  $\epsilon(t)$  über die Integration bzw. Differentiation zusammenhängen. Es gilt:

$$\delta(t) = \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

Für den hier betrachteten Fall zeitdiskreter Signale geht die Impulsfolge  $\delta(k)$  durch die Bildung der ersten Differenz aus der Sprungfolge  $\epsilon(k)$  hervor, d.h.

$$\delta(k) = \epsilon(k) - \epsilon(k-1). \quad (1.11)$$

a) Gegeben ist eine Rechteckimpulsfolge der Länge  $L = 6$ :

$$x_0(k) = \begin{cases} 1 & 5 \leq k \leq 10 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Berechnen Sie die erste Differenz  $x_1(k) = x_0(k) - x_0(k-1)$  für  $k = 3 \dots 12$  und skizzieren Sie die Folgen  $x_0(k)$ ,  $x_0(k-1)$  und  $x_1(k)$ . Stellen sie anschließend die Folgen mit Hilfe von MATLAB graphisch dar und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den berechneten.

Befehl:

- `x0=[zeros(1,4) ones(1,6) zeros(1,3)];`
- `k=1:13;`
- `erste_d(k,x0);`

b) Gegeben ist der folgende Ausdruck für eine periodische Folge:

$$x_0(k) = \sum_{l=0}^{M-1} \delta(k - lP - 2). \quad (1.13)$$

Die Gesamtlänge der Folge ist  $MP$ , wobei  $P$  die Periode darstellt.

- Stellen sie eine periodische Folge nach Glg.(1.13) mit Hilfe von MATLAB graphisch dar. (Befehl: `imp_per`)
- Geben Sie mit Hilfe von Glg.(1.13) einen Ausdruck für die dargestellte Folge an.
- Geben Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen den Folgen  $x_0(k)$  und  $x_1(k)$  an.

## Exponentialfolgen

- a) Gegeben ist die zeitkontinuierlich komplexe Exponentialschwingung

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad (1.14)$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega = 3\frac{1}{5}$ . Die Exponentialschwingung wird mit der Frequenz  $f_a = \frac{1}{\pi}$  Hz abgetastet.

- Geben sie die durch die Abtastung entstandene Folge  $x(k)$  nach Glg.(1.4) an.
- Skizzieren Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Exponentialfolge.
- Geben Sie für die komplexe Exponentialfolge einen Ausdruck unter Verwendung der Impulsfolge  $\delta_0(k)$  und Glg.(1.6) an.

- b) Gegeben ist der Realteil einer komplexen Exponentialfolge

$$x(k) = \cos(k) \quad \forall \quad k = -\infty \dots \infty. \quad (1.15)$$

- Stellen Sie die Folge  $x(k)$  im Bereich  $k = 0 \dots 20$  graphisch dar. (Befehl: `cos_abt`)
- Begründen Sie, warum  $x(k)$  ( $k \in [0 \dots 20]$ ) keine periodische Folge ist.

**Abtastung, Aliasing** Im folgenden wird ein *idealer Tiefpass* betrachtet, dessen Impulsantwort und Frequenzgang durch folgende Ausdrücke gegeben sind,

$$h_{TP}(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t} \quad \text{und} \quad H_{TP}(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_g \\ 0.5 & |\omega| = \omega_g, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.16)$$

- a) • Skizzieren Sie die Impulsantwort und den Frequenzgang des idealen Tiefpasses.  
 • Durch die Abtastung der zeitkontinuierlich Impulsantwort mit der Abtastfrequenz  $f_a$  wird die zeitdiskrete Folge

$$h_{TP}(k) = \frac{\omega_g}{\pi} \frac{\sin(\Omega_g k)}{\Omega_g k} \quad (1.17)$$

gewonnen. Der zugehörige Frequenzgang ist dabei durch die zeitdiskrete Fourier-Transformierte nach Glg.(1.7) gegeben.

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $\Omega_g$ ,  $\omega_g$  und der Abtastfrequenz  $f_a$ ?
- Berechnen Sie die maximale normierte Grenzfrequenz  $\Omega_g$  für die kein Aliasing eintritt.

- b) Im folgenden ist die Grenzfrequenz des idealen Tiefpasses gleich  $f_g = 1$  kHz.

Stellen Sie die zeitdiskrete Impulsantwort und deren Frequenzgang für die drei Abtastfrequenzen

- 1)  $f_a = 3$  kHz
- 2)  $f_a = 1.5$  kHz
- 3)  $f_a = 2$  kHz

graphisch dar.

(Befehl: `si(f_g, f_a)` z.B. `si(1,3)`)

- Interpretieren Sie die Ergebnisse für die Fälle 1) und 2).
- Fall 3:
  - Was für eine Folge stellt  $h_{TP}(k)$  dar, Begründung?
  - Welche für die Nachrichtentechnik sehr wichtige Bedingung erfüllt dabei die Abtastung mit  $f_a = 2$  kHz?

## Chapter 2

# Lineare Systeme

**Tobias Monsees**

NW1, Raum N2370, Tel.: 0421/218-62407

E-Mail: [tmonsees@ant.uni-bremen.de](mailto:tmonsees@ant.uni-bremen.de)

### 2.1 Einführung

Der Versuch Lineare Systeme beschäftigt sich mit grundlegenden Methoden, um Signale zum Zwecke der Übertragung zu modulieren und mit Hilfe geeigneter Verfahren empfangen bzw. rekonstruieren zu können. Ferner wird aufgezeigt, wie sich für einen Bandpass-Kanal ein äquivalenter Basisband-Kanal herleiten lässt.

Für die Durchführung dieses Versuchs wird die Kenntnis des in den Folien zur Vorlesung Grundlagen der Nachrichtentechnik behandelten Stoffes vorausgesetzt, die unter <http://www.ant.uni-bremen.de/courses/gnt/> heruntergeladen werden können.

Dies bezieht sich im Besonderen auf die Themen

- Hilbert-Transformation
- Analytische Signale
- Äquivalente Tiefpass-Darstellung von Bandpass-Signalen
- Quadraturfilter

Die einzelnen Aufgaben zur Versuchsdurchführung finden sich jeweils in den Erläuterungen der Theorie.

### 2.2 Vorbereitung

Zur Vorbereitung des Versuchs ist die nachfolgend aufgeführte Theorie durchzuarbeiten. Ferner ist zu der in Kapitel 2.3 erläuterten Hilbert-Transformation eine MATLAB-Aufgabe zu bearbeiten. Der Code wird zur erfolgreichen Durchführung des Versuchs benötigt.

## 2.3 Hilbert-Transformation

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches Cosinus-Signal der Frequenz  $f_1 = 0,4\text{kHz}$

$$x_1(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad (2.1)$$

Die korrespondierende Fourier-Transformierte ist

$$X_1(j\omega) = \text{Re} \{X_1(j\omega)\} + j \text{Im} \{X_1(j\omega)\} \quad (2.2)$$

Die Hilbert-Transformierte  $\hat{X}_1(j\omega)$  zu  $X_1(j\omega)$  ist im Spektralbereich definiert als

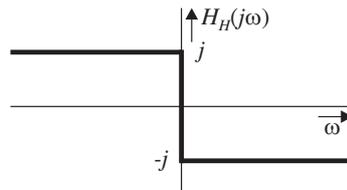
$$\hat{X}_1(j\omega) = \text{Im} \{X_1(j\omega)\} \cdot \text{sgn}(\omega) - j \text{Re} \{X_1(j\omega)\} \cdot \text{sgn}(\omega) \quad (2.3)$$

wobei  $\text{sgn}(\omega)$  die Signumfunktion bezeichnet.

Fasst man die Hilbert-Transformation als eine Übertragungsfunktion  $H_{\mathcal{H}}(j\omega)$  gemäß

$$\hat{X}_1(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot H_{\mathcal{H}}(j\omega) \quad (2.4)$$

auf, so entspricht sie der folgenden Kennlinie.



**Figure 2.1:** Übertragungsfunktion eines Hilbert-Transformators

Für ein Kosinus-Signal  $x_1(t)$  (ohne Phasenverschiebung), welches ein reines reelles Spektrum besitzt, ist das Spektrum seiner Hilbert-Transformierten  $\hat{x}_1(t)$  also rein imaginär.

### 2.3.1 Vorbereitungsaufgabe

#### AUFGABE

- Generieren Sie mit MATLAB einen Zeitvektor `t1` der Länge 20ms und mit dem Abtastintervall  $\Delta T = \frac{1}{200}$  ms. Erzeugen Sie ein Cosinus-Signal  $x_1(t)$  der Frequenz  $f_1 = 0,4\text{kHz}$ .
- Bestimmen Sie die Fouriertransformierte  $X_1(j\omega)$  anhand der Funktion `f_reihe`.
- Stellen Sie das Zeitsignal mit `plot_zeitsignal` und seine Fouriertransformierte mit `bar_spektrum` dar.
- Bestimmen Sie die Hilbert-Transformierte  $\hat{x}_1(t)$  bzw. `xh` mit Hilfe der Funktion `[th,xh]=hilbert_transformation(t1,x1)`.
- Bestimmen Sie die Fouriertransformierte  $\hat{X}_1(j\omega)$  des Signal  $\hat{x}_1(t)$  anhand der Funktion `f_reihe` und stellen Sie wiederum das Zeitsignal und das Spektrum dar. Was lässt sich über die Spektralanteile von  $x_1(t)$  und  $\hat{x}_1(t)$  aussagen ?

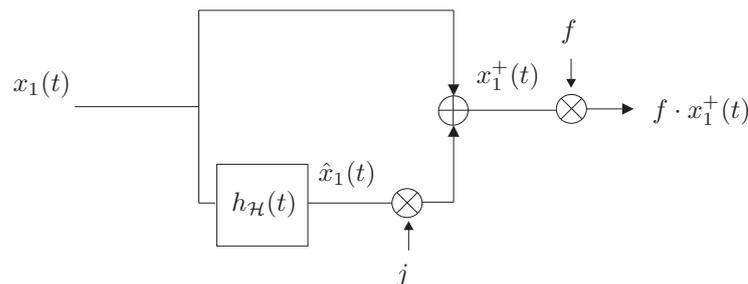
## 2.4 Analytische Signale

Die Spektren reeller Zeitsignale besitzen immer ein konjugiert gerades Spektrum, also einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Spektralanteil.

Ein komplexes Zeitsignal, dessen Imaginärteil die Hilberttransformierte seines Realteils ist, besitzt stets ein Spektrum, das für negative Frequenzen verschwindet. Man nennt solche Signale **analytische Signale**.

Es soll nun gezeigt werden, wie anhand der Hilbert-Transformation ein reelles Zeitsignal  $x_1(t)$  in ein analytisches Signal  $x_1^+(t)$  überführt werden kann.

Man betrachte das Blockschaltbild in Bild 2.2.



**Figure 2.2:** Blockschaltbild zur Erzeugung eines analytischen Signals

Die abschliessende Multiplikation mit dem Faktor  $f$  sei zunächst ausser acht gelassen.

Zu dem reellen Zeitsignal wird seine Hilbert-Transformierte gebildet, diese mit  $j$  multipliziert und beide Terme addiert, so dass das analytische Signal entsteht

$$x_1^+(t) = x_1(t) + j \hat{x}_1(t) \quad (2.5)$$

### 2.4.1 AUFGABE

- Erzeugen Sie für das Signal  $x_1(t)$  das analytische Signal  $x_1^+(t)$ . Bestimmen Sie die Fouriertransformierten beider Signale. Stellen Sie beide Signale im Zeit- und Frequenzbereich dar.

Die Leistung eines Signals  $x(t)$  ist wie folgt definiert:

$$E\{|x(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.6)$$

- Bestimmen Sie die Leistung von  $x_1(t)$ .
- Bestimmen Sie die Leistung von  $x_1^+(t)$ .
- Welchen Wert muss der Faktor  $f$  annehmen, damit die Leistungen von  $x_1(t)$  und  $f \cdot x_1^+(t)$  identisch sind?

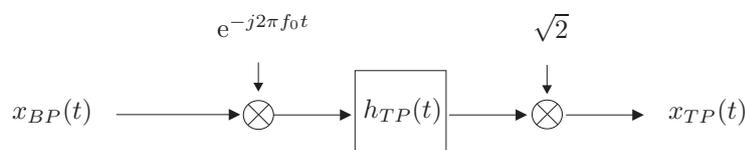
## 2.5 Demodulation und Tiefpass-Filterung

Prinzipiell stellt sich bei Signalen, welche zum Zwecke der Übertragung um eine Frequenz  $f_0$  hochmoduliert wurden, die Aufgabe, das Signal am Empfänger wieder entsprechend zu rekonstruieren.

### AUFGABE

- Laden Sie das Signal  $x_{BP}(t)$  bzw. `xbp` und den dazugehörigen Zeitvektor `tbp`, indem Sie `load xbp` eingeben.
- Transformieren Sie das Signal in den Frequenzbereich und stellen Sie es im Intervall  $-25\text{kHz} \leq f \leq 25\text{kHz}$  dar.

Die Vorgehensweise ist in Bild 2.3 dargestellt.



**Figure 2.3:** Demodulation und Tiefpassfilterung

Das Signal wird zunächst um die Frequenz  $f_0$  demoduliert, damit das zuvor rechtsseitige Spektrum zentriert um die Frequenzachse liegt. Die anschließende Tiefpassfilterung mit entsprechender Grenzfrequenz führt dazu, dass das zuvor linksseitige Spektrum vollständig entfernt wird. Die abschliessende Normierung mit dem Faktor  $\sqrt{2}$  wird aus dem Grund der Leistungserhaltung durchgeführt (siehe Abschnitt 2.4).

### AUFGABE

- Demodulieren Sie das Signal  $x_{BP}(t)$  mit einer Frequenz von  $f_0 = 10\text{kHz}$ .
- Stellen Sie das demodulierte Signal im Frequenzbereich bis  $-25\text{kHz} \leq f \leq 25\text{kHz}$  dar.
- Führen Sie eine Filterung des demodulierten Zeitsignals mit einem Tiefpass-Filter der Grenzfrequenz  $5\text{kHz}$  durch. Verwenden Sie hierzu den Befehl `x_tp = tiefpass(tbp, xbp, 5)`
- Normieren Sie das Signal mit dem Faktor  $\sqrt{2}$ .
- Transformieren Sie das erhaltene Signal in den Frequenzbereich. Stellen Sie es im Zeit- und Frequenzbereich dar.

## 2.6 Quadraturmischer

Eine Alternative zum obigen Konzept stellt der Quadraturmischer dar. Wiederum sei das Blockschaltbild betrachtet (Bild 2.4).

Es wird zunächst mit Hilfe der Hilbert-Transformierten das analytische Signal gebildet. Anschliessend wird eine Demodulation um die Frequenz  $f_0$  durchgeführt und abschliessend mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  normiert.

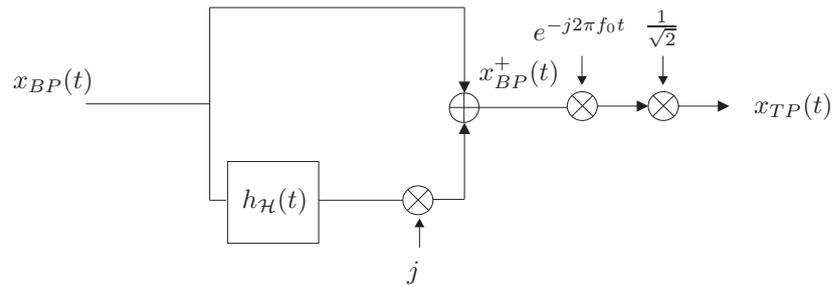


Figure 2.4: Quadraturmischer

## AUFGABE

- Bilden Sie die Hilbert-Transformierte von  $x_{BP}(t)$ .
- Erzeugen Sie das analytische Signal  $x_{BP}^+(t)$ .
- Stellen Sie das analytische Signal  $x_{BP}^+(t)$  im Frequenzbereich dar.
- Demodulieren Sie das analytische Signal um  $f = 10\text{kHz}$  und normieren Sie es.
- Stellen Sie das Signal  $x_{TP}(t)$  im Zeit- und Frequenzbereich dar.

## 2.7 Äquivalentes Basisbandmodell

### 2.7.1 Direkte Übertragung

Bild 2.5 zeigt eine Übertragungsstrecke.

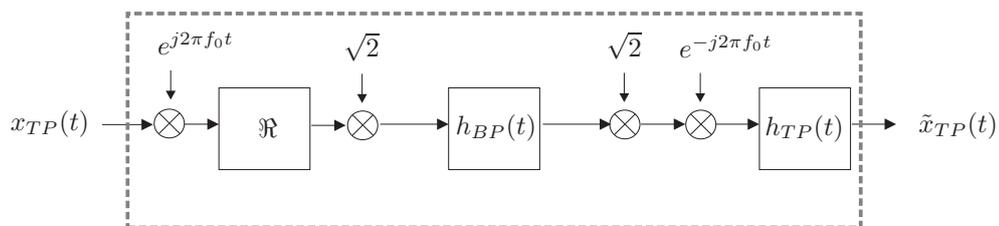


Figure 2.5: Übertragungsstrecke

Zunächst wird das Signal auf die Frequenz  $f_0$  hochmoduliert. Hier sei  $f_0 = 10\text{kHz}$ . Anschliessend wird der Realteil des Signals genommen und mit  $\sqrt{2}$  multipliziert, um die gleiche Leistung des Eingangssignals zu erhalten.

Der Übertragungskanal ist ein Bandpass-Kanal mit einer nicht konstanten Amplitude im Frequenzbereich.

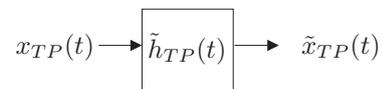
Es folgt die Demodulation mit Leistungsnormierung und eine Bandbegrenzung mit Hilfe eines Tiefpass-Filters.

## AUFGABE

- Laden Sie das Tiefpass-Signal  $x_{TP}(t)$  mit `load xtp`
- Übertragen Sie das Signal bis zum dem Punkt, bevor es in den Übertragungskanal  $h_{BP}(t)$  geht.
- Stellen Sie das Signal im Frequenzbereich dar.
- Laden Sie den Frequenzgang des Bandpass-Kanals  $H_{BP}(j\omega)$  mit `load HBP`
- Stellen Sie den Frequenzgang des Kanals dar.
- Führen Sie die Übertragung über den Kanal als Multiplikation im Frequenzbereich durch.
- Stellen Sie das Signal im Frequenzbereich nach der Übertragung über den Kanal dar.
- Transformieren Sie das Signal zurück in den Zeitbereich und erzeugen Sie das Signal  $\tilde{x}_{TP}(t)$ . Verwenden Sie zur Tiefpassfilterung die Funktion `x_tp = tiefpass(t,x,f_g)`, wobei `f_g` die Grenzfrequenz mit  $f_g = 5\text{kHz}$  sei.
- Stellen Sie  $\tilde{x}_{TP}(t)$  im Frequenzbereich dar.

### 2.7.2 Äquivalentes Kanalmodell

An Stelle der Modulation des zu übertragenden Signal über die gesamte Übertragungstrecke ist es zu Simulationszwecken bei genauer Kenntnis bzw. Annahme des Kanals auch möglich, mit dem **äquivalenten Basisbandmodell** zu arbeiten.



**Figure 2.6:** Äquivalentes Basisbandmodell

Hierbei wird die gesamte Übertragungstrecke einschliesslich des Kanals - wie in Bild 2.5 grau gestrichelt gekennzeichnet - als ein System  $\tilde{h}_{TP}(t)$  aufgefasst.

Der Zusammenhang der beiden Systeme ist gegeben durch

$$\tilde{h}_{TP}(t) = \frac{1}{2} h_{BP}^+(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \quad (2.7)$$

## AUFGABE

- Transformieren Sie den Frequenzgang des Bandpass-Kanals in den Zeitbereich, um  $h_{BP}(t)$  zu erhalten.
- Erzeugen Sie den Äquivalenten Tiefpasskanal  $\tilde{h}_{TP}(t)$ .
- Transformieren Sie  $\tilde{h}_{TP}(t)$  in den Frequenzbereich.
- Transformieren Sie  $x_{TP}(t)$  in den Frequenzbereich.

- Führen Sie die Übertragung über den Kanal als Multiplikation im Frequenzbereich durch.
- Transformieren Sie das Signal in den Zeitbereich zurück.
- Stellen Sie das Signal  $\tilde{x}_{TP}(t)$  im Zeit- und Frequenzbereich dar. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Übertragung über die gesamte Übertragungsstrecke.

## Chapter 3

# UKW-Radio

**Johannes Demel**

NW1, Raum N2380, Tel.: 0421/218-62393

E-Mail: demel@ant.uni-bremen.de

### 3.1 Einführung

Die in der Vorlesung behandelten prinzipiellen Empfänger und Modulationsformen finden sich im Laufe der Geschichte des Hörrundfunks wieder. Anfangs wurde nur über Lang-, Mittel- und Kurzwelle übertragen. In diesen Bereichen wurde AM als Modulation eingesetzt. Die Qualität dieser Modulationsart kennt sicherlich jeder, der an seinem Radio meist "aus Versehen" in diesen Bereich geschaltet hat. Von einer zufriedenstellenden Qualität vor allem für Musik kann kaum die Rede sein. Der Grund, warum diese Bereiche immer noch genutzt werden und ihre Daseinsberechtigung haben, liegt an der Reichweite. Mit sogenannten Weltempfängern kann man zum Beispiel nahezu überall in der Welt deutsche Sender empfangen. Nach dem zweiten Weltkrieg wurde dann der UKW-Rundfunk mit Frequenzmodulation eingeführt. Die Qualität der Übertragung war deutlich besser und die zur Verfügung stehende Bandbreite ermöglichte die Ausstrahlung von Stereosignalen ab den 1960er Jahren.

In den Anfangsjahren des Hörrundfunks wurden Geradeausempfänger eingesetzt, die mit wenigen Bauteilen realisiert werden konnten. Nach dem ersten Weltkrieg wurde der Überlagerungsempfänger (Superheterodynempfänger) entwickelt und hat sich durch seine vielen Vorteile durchgesetzt. Das Überlagerungsprinzip wird inzwischen in vielen Systemen verwendet. In modernen digitalen Systemen werden allerdings wieder vermehrt direktmischende Strukturen verwendet. Die von vielen Stellen gewünschte Umstellung des Hörrundfunks auf digitale Übertragung kommt nur schleppend voran, so dass das UKW-Radio in der hier vorgestellten Form wohl noch einige Jahre erhalten bleibt.

Einige Grundlagen des UKW-Rundfunks werden im Folgenden kurz erläutert und untersucht. In diesem Versuch sollen die Empfängerstrukturen genauer untersucht und mit Messungen anhand eines in GNU Radio realisierten UKW-Empfängers vertieft werden.

Für die Durchführung des Matlabeils ist eine FM-Simulationsstrecke vorgegeben, die im Zuge der Versuchsdurchführung erweitert und ergänzt wird. Die Grundlagen zum Superheterodyn-Empfänger müssen bekannt sein. Zudem müssen die Vorbereitungsaufgaben erledigt sein. Sollte dies ohne Hilfestellung nicht möglich sein, bitte rechtzeitig vor dem Versuch melden.

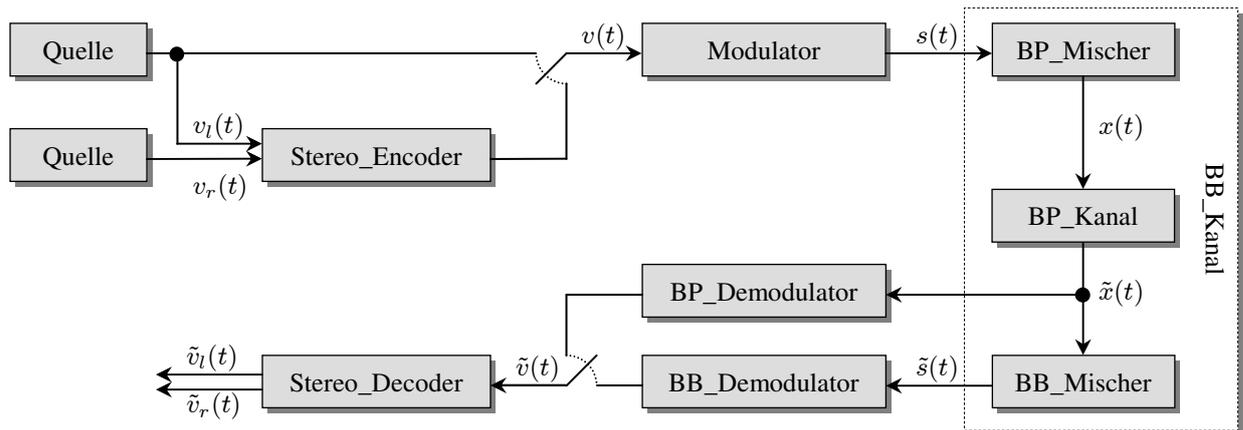


Figure 3.1: Blockschaltbild einer UKW-Übertragungsstrecke

$v = \text{Quelle}(t, \text{sigtyp}, f_v)$	
sigtyp	Art des Quellensignals (z.B. 'cos' oder 'multisin')
$f_v$	Frequenz(en) des Quellensignals
$v$	Quellensignal
$s = \text{Modulator}(t, v, \text{modtyp}, \text{modpar})$	
$v$	Quellensignal (bzw. Stereo-Multiplex-Signal)
modtyp	Modulationsart ('AM' oder 'FM')
modpar	Modulationsparameter ( $m$ für AM bzw. $\Delta F$ für FM)
$s$	komplexe Einhüllende
$x = \text{BP\_Mischer}(t, s, f_0)$	
$s$	komplexe Einhüllende
$f_0$	Trägerfrequenz
$x$	Sendesignal im Bandpassbereich
$x_{\text{tilde}} = \text{BP\_Kanal}(t, x)$	
$x$	Sendesignal im Bandpassbereich
$x_{\text{tilde}}$	Empfangssignal im Bandpassbereich
$v_{\text{tilde}} = \text{ZF\_Demodulator}(t, x_{\text{tilde}}, \text{modtyp}, f_0)$	
$v_{\text{tilde}}$	Geschätztes Quellensignal
$x_{\text{tilde}}$	Empfangssignal im Bandpassbereich
modtyp	Modulationsart ('AM' oder 'FM')
$f_0$	Trägerfrequenz

Table 3.1: Funktionsaufrufe für die Blöcke in Bild 3.1 (jeweils mit Zeitvektor  $t$ )

### 3.1.1 Beschreibung der Simulationsumgebung

Bild 3.1 zeigt ein Blockschaltbild einer UKW-Übertragungsstrecke, die in leicht veränderter Form in Matlab nachgebildet werden soll. Zu den relevanten Blöcken (Quelle, Modulator, BP\_Mischer, BP\_Kanal) existieren bereits kommentierte m-Files, die Sie bei der Versuchsvorbereitung bzw. -durchführung nur noch vervollständigen und korrekt im Hauptfile Sim\_Radio aufrufen müssen. Der Empfangszweig aus Bild 3.1 wird entsprechend des Superheterodyn-Empfängers in diesem Versuch durch ZF\_Demodulator ersetzt. Eine Stereo-Decodierung findet nicht statt, ist aber sehr wohl für den GNU Radio Teil relevant.

In der Quelle wird ein bestimmtes Quellensignal  $v(t)$  erzeugt, aus dem der Modulator die komplexe

Einhüllende  $s(t)$  für FM bildet. Diese wird vom `BP_Mischer` in den Bandpass-Bereich verschoben und das resultierende Signal  $x(t)$  anschließend über den `BP_Kanal` übertragen. Im `BP_Demodulator` erfolgt die Demodulation direkt anhand des Empfangssignals, während  $\tilde{x}(t)$  vor dem `BB_Demodulator` erst durch den `BB_Mischer` ins äquivalente Basisband überführt werden muss. In diesem Versuch wird der Empfänger `ZF_Demodulator` gemäß 3.4 die genannten Strukturen ersetzen. Der `Stereo_Encoder` und der `Stereo_Decoder` werden im folgenden Abschnitt noch genauer beschrieben, da das Stereomultiplexsignal im Zuge der Messungen am UKW-Empfänger von Relevanz ist. Eine Auflistung sämtlicher Funktionsaufrufe mit einer Beschreibung der jeweiligen Parameter finden Sie in Tabelle 3.1. Halten Sie sich bitte möglichst an die vorgegebenen Bezeichnungen, um eine eventuelle Fehlersuche zu erleichtern!

### 3.1.2 Stereo-Multiplex

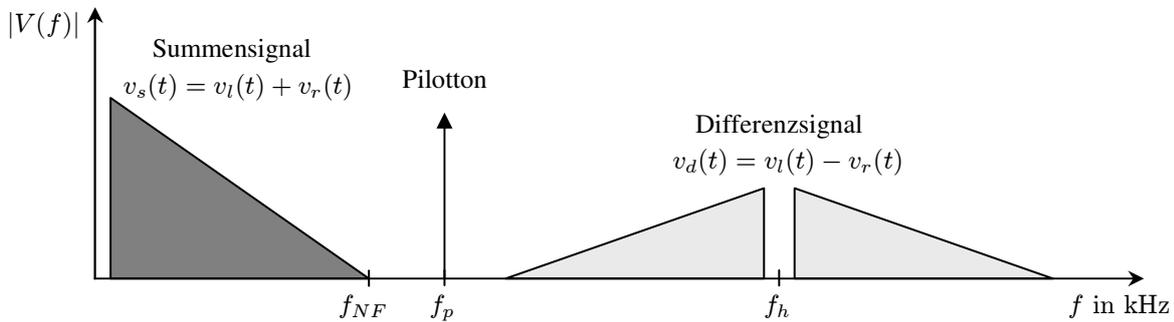


Figure 3.2: Spektrum eines Stereo-Multiplex-Signals

Ein Stereo-Signal besteht aus zwei unabhängigen Signalen  $v_l(t)$  und  $v_r(t)$  für den linken und den rechten Kanal. Man könnte diese beiden Signale einfach direkt auf unterschiedlichen Trägerfrequenzen übertragen und am Empfänger getrennt voneinander demodulieren. In dem Fall würde mit einem Mono-Radio aber nur entweder der linke oder der rechte Kanal zu hören sein. Aus Gründen der Rückwärtskompatibilität wird stattdessen das Stereo-Multiplex-Signal

$$v(t) = \underbrace{[v_l(t) + v_r(t)]}_{\text{Summensignal } v_s(t)} + \underbrace{[v_l(t) - v_r(t)] \cdot \cos(2\pi f_h t + \varphi_h)}_{\text{Differenzsignal } v_d(t) \text{ auf Hilfsträger}} + \underbrace{\cos(2\pi f_p t)}_{\text{Pilotton}} \quad (3.1)$$

gesendet, dessen Spektrum in Bild 3.2 dargestellt ist. Neben dem Summensignal  $v_s(t)$  wird das Differenzsignal  $v_d(t)$  auf einem Hilfsträger mit der Frequenz  $f_h$  mittels ZSB übertragen. Beim UKW-Hörrundfunk beträgt die NF-Bandbreite  $f_{NF} = 15$  kHz und der Hilfsträger liegt bei  $f_h = 38$  kHz. Insgesamt ergibt sich damit ein Bandbreitebedarf von  $f_h + f_{NF} = 53$  kHz für das Multiplexsignal.

Ein Mono-Empfänger führt lediglich eine Tiefpassfilterung mit der Grenzfrequenz  $f_{NF}$  durch und erhält auf diese Weise das Summensignal  $\tilde{v}_s(t)$ . In einem Stereo-Decoder muss zusätzlich das ZSB-modulierte Differenzsignal *phasenrichtig* ins Basisband heruntergemischt werden. Dazu dient der Pilotton bei  $f_p = f_h/2$ , dessen Frequenz sich beispielsweise mit Hilfe einer so genannten Phase-Locked Loop (PLL) oder durch Quadrieren verdoppeln lässt. Im Vergleich zu einer AM, bei der der Träger direkt bei  $f_h$  übertragen wird, bietet dies den Vorteil, dass der Bandpass zum Herausfiltern des Pilottons nicht so steil sein muss. Aus dem Summen- und dem demodulierten Differenzsignal können schließlich gemäß Bild 3.3 durch Addition bzw. Subtraktion die beiden Stereo-Kanäle rekonstruiert werden.

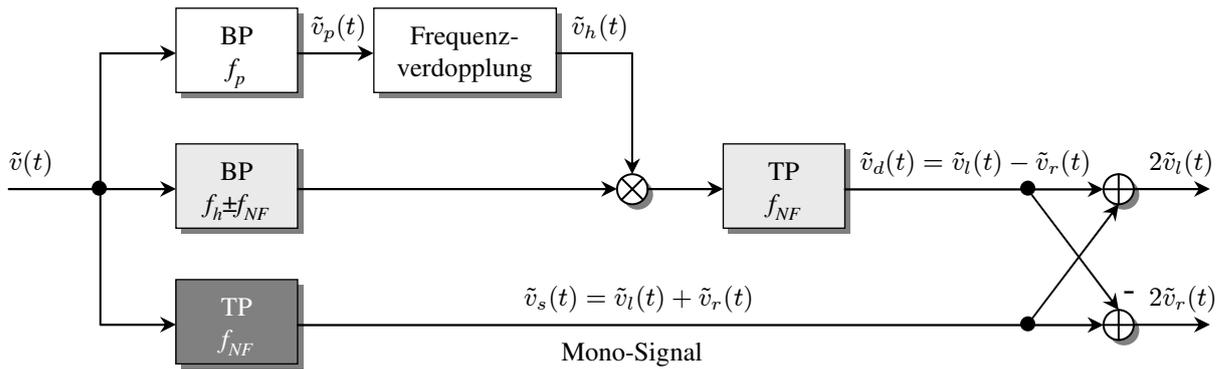


Figure 3.3: Blockschaltbild eines Stereo-Decoders

## 3.2 Vorbereitungsaufgaben

Die vorgegebenen Matlab-Funktionen dienen in diesem Versuch als Grundlage für eine Simulationsstrecke eines UKW-Systems mit mehreren Sendern. Um die Signalverarbeitung einfacher zu machen, werden alle relevanten Frequenzen gegenüber dem bestehenden UKW-Rundfunk deutlich reduziert. Die verschiedenen Sender sollen zum Beispiel im Bereich 100 kHz-300 kHz.

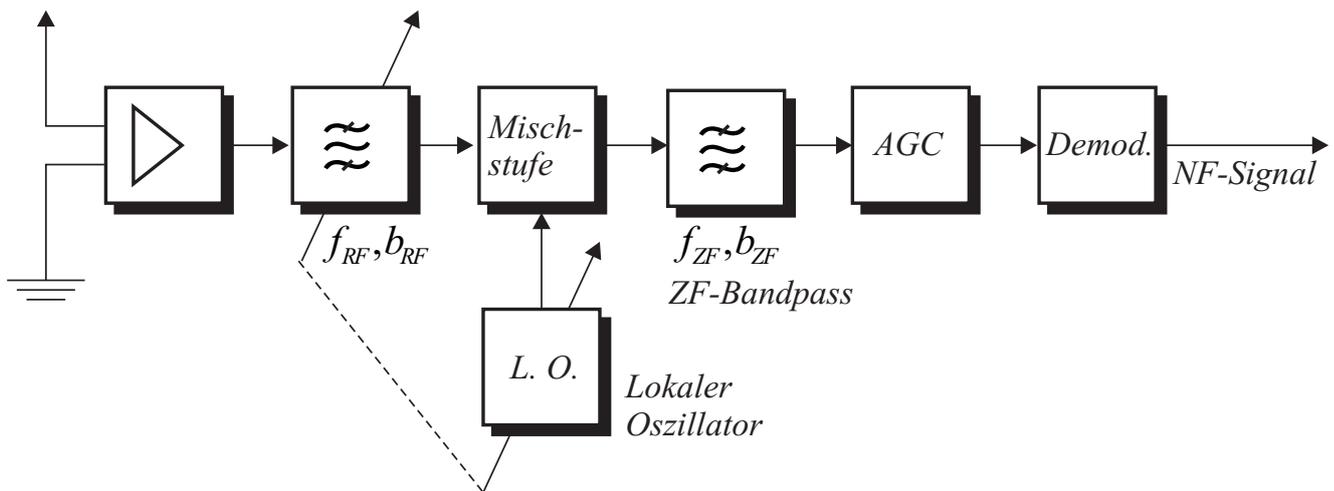


Figure 3.4: Blockschaltbild eines Superheterodyn-Empfängers

### Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

1. Erläutern Sie das Prinzip des Frequenzmultiplex.
2. Welche Carson-Bandbreite hat ein FM-Signal, wenn die maximale Signalfrequenz 3 kHz und der Frequenzhub 4 kHz beträgt?
3. Welchen Abstand müssen die Trägerfrequenzen zweier benachbarter Sender mindestens haben, um Sie am Empfänger wieder trennen zu können?

### Aufgabe 2: Anpassung des Matlab-files

Öffnen Sie das File `Sim_Radio`.

1. Der Frequenzhub soll in diesem Versuch 4 kHz betragen.
2. Um die Funktionsaufrufe `Quelle`, `Modulator` und `BP_Mischer` ist eine `for`-Schleife zu legen, um mehrere Sender generieren zu können. Definieren Sie dazu im oberen Teil des Files eine Variable `N_Sender` und initialisieren Sie diese mit 5. Die Schleife sieht dann so aus:

```
for Sender=1:N_Sender
    %Erzeugung des Quellensignals
    ...
    %FM-Modulation
    ...
    %Hochmischen zur Trägerfrequenz
    ...
end
```

3. Um die Signale der verschiedenen Sender gleichzeitig zur Verfügung zu haben, werden aus den Vektoren `v`, `s` und `x` Matrizen gemacht, die die Signale der Sender als Spalten beinhalten. (`v = → v(:, Sender) =`)
4. Entfernen Sie den Funktionsaufruf für den Empfänger. Dieser wird erst während des Versuchs betrachtet.

### Aufgabe 3: Erzeugung eines Signals mit mehreren Sendern

1. Als Trägerfrequenzen der zu erzeugenden Sender werden 100, 140, 170, 230 und 300 kHz gewählt. Diese Werte sind in einem Vektor `f_0` abzulegen. Während des Durchlaufs der Schleife zur Modulation soll dann die entsprechende Frequenz verwendet werden.
2. Als Signale werden der Einfachheit halber monofrequente Cosinus-Signale verwendet ohne Stereomultiplex. Die Signalfrequenzen sind als `f_1 = [0.4, 2, 0.8, 1, 3]` zu wählen. Ändern Sie die Funktionsaufrufe so, dass für den ersten Sender die erste Trägerfrequenz und die erste Signalfrequenz verwendet wird usw.
3. Setzen Sie `plot_flag` nach dieser Schleife auf 1.
4. Beim UKW-Rundfunk überlagern sich die Signale aller Sender in der Luft. Daher werden im Anschluss an die Senderschleife alle Signale auf dem Kanal überlagert. Dazu muss die Funktion `BP_Kanal` verändert werden. Dies geschieht durch den Befehl `sum(x, dim)`. Beachten Sie die Hilfe und die Dimension der Matrix mit den Sendesignalen. Je nach Parameterwahl für `dim` erfolgt eine Summation über die Spalten oder über die Zeilen einer Matrix.
5. Ergänzen Sie in `BP_Kanal` eine graphische Ausgabe für das Spektrum des Summensignals. Übernehmen Sie die Vorgehensweise, das `plot_flag` abzufragen. Im gesamten Versuch soll die Funktion `bar_betragspektrum` zum Plotten der Spektren verwendet werden. Speichern Sie dieses Bild ab und bringen Sie es zusammen mit den erweiterten m-files zum Versuchstermin mit!

### 3.3 Versuchsdurchführung

Der Versuch ist grundsätzlich in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil ist die Simulation einer UKW-Strecke in Matlab. Der zweite Teil beschäftigt sich mit dem GNU Radio UKW-Empfänger. Die Beschreibungen sind daher in zwei unabhängige Teile gegliedert.

#### 3.3.1 Matlab: Simulation eines UKW-Empfängers

##### Struktur des Empfängers

Erzeugen Sie eine Matlab-Funktion "ZF\_Demodulator", die wie folgt aufgerufen werden soll:

```
v_tilde(:,Sender) = ZF_Demodulator(t,x_tilde,'FM',f_0);
```

Wie bereits in der Vorbereitung erarbeitet, besteht ein Superheterodyn-Empfänger aus verschiedenen Blöcken, deren Funktion und Dimensionierung Thema dieses Versuchs ist. In Abbildung 3.4 ist das Blockschaltbild dargestellt.

Zunächst soll das Grundprinzip der Zwischenfrequenz untersucht werden:

1. Zunächst wird nur ein Sender betrachtet, daher wird im Hauptprogramm die Anzahl der Sender auf 1 gesetzt. Dadurch wird nur die erste Trägerfrequenz und die erste Signalfrequenz verwendet.
2. Definieren Sie in der neuen Funktion eine Variable für die Zwischenfrequenz  $f_{zf}$  und setzen sie diese auf 40 kHz.
3. Berechnen Sie die nötige Frequenz des Lokalen Oszillators (LO), die nötig ist, um den ersten Sender auf die Zwischenfrequenz zu mischen. Es gibt zwei mögliche Frequenzen, berechnen Sie beide!
4. Wählen Sie für diesen Versuch immer die größere der beiden und ergänzen Sie die nötigen Zeilen, die diese Oszillatorfrequenz innerhalb der Funktion für den jeweils aktuellen Sender berechnet.
5. Mischen Sie das Empfangssignal reell auf die Zwischenfrequenz von 40 kHz.
6. Demodulieren Sie nun das FM-Signal. Muss nun eine Bandpass- oder eine Basisband-Demodulation durchgeführt werden? Nutzen Sie die vorgefertigten Funktionen für die Demodulation. Deaktivieren Sie die graphischen Ausgaben vorübergehend, um die Anzahl der Figures zu begrenzen. Unterdrücken Sie den Gleichanteil des demodulierten Signals entweder durch einen Hochpass oder durch Subtraktion des Mittelwertes.
7. Geben Sie das Spektrum des ZF\_Signals aus. Geben Sie dabei die dargestellte Bandbreite explizit mit 250 kHz fest vor.
8. Neben dem gewollten Spektrum bei der Zwischenfrequenz ist noch ein zweites Mischprodukt bei  $2 \cdot f_0 + f_{zf}$  zu erkennen. Dieses muss durch einen Tiefpass unterdrückt werden. Wählen Sie als Grenzfrequenz dieses Tiefpasses  $f_{LO}$ . Plotten Sie auch dieses Spektrum nach dieser Filterung. Es sollte nur noch das Signal bei der Zwischenfrequenz zu sehen sein. Speichern Sie das Bild.
9. Hören Sie sich mit der Funktion `play_sound` das gesendete Signal `v(:,Sender)` und dann das demodulierte Signal `v_tilde(:,Sender)` an (Nicht innerhalb der Funktion, sondern im Command-Window). Ist der Sender korrekt empfangen worden?
10. Plotten Sie auch das Spektrum des demodulierten Signals. Entspricht das Spektrum einem Cosinussignal?

## Empfang bei Frequenzmultiplex

1. Aktivieren Sie nun auch den zweiten Sender und wiederholen Sie den Vorgang. Hören Sie sich das Ergebnis der Demodulation beider Sender an. Sind beide korrekt empfangen worden? Betrachten Sie die Spektren beider Signale. Sind die Störungen auch hier zu erkennen?
2. Welche Blöcke des Superheterodynempfängers sind noch nicht implementiert? Welcher davon ist in diesem Fall für die Störung verantwortlich? (Hinweis: Sie können durch Berechnung der Spiegelfrequenz erfahren, ob das Spiegelfrequenzproblem die Ursache sein kann).
3. Implementieren Sie in der Empfangsfunktion diesen Block (Bandpass) an der Stelle, die dem Blockschaltbild 3.4 entspricht. Wählen Sie zur Dimensionierung einen etwas größeren Wert als die maximal mögliche Bandbreite (Carson-Bandbreite). Betrachten Sie das resultierende Signal im Frequenzbereich. Speichern Sie das Bild. Was wurde unterdrückt? Hören Sie sich das demodulierte Signal an. Wurde es jetzt richtig empfangen?
4. Aktivieren Sie nun alle 5 Sender. Starten Sie das Programm erneut und hören Sie sich alle Sender original (Sendesignal) und demoduliert (Empfangssignal) an. Welche Sender werden ungestört empfangen und welche nicht? Woran kann ein gestörter Empfang nun liegen?
5. Setzen Sie nun den letzten fehlenden Block an die entsprechende Stelle gemäß Abbildung 3.4. Berechnen Sie die maximale Bandbreite. Wählen Sie hier einen etwas kleineren Wert. Welche Faktoren spielen dabei eine Rolle? Starten Sie die Simulationsstrecke erneut. Nun sollten alle Sender fehlerfrei demoduliert werden. Sehen Sie sich als Beispiel die Zeit- und die Frequenzsignale des 3. Senders an und speichern Sie die Bilder.

Bevor Sie diesen Teil des Versuchs beenden, sagen Sie einem Betreuer Bescheid, der Ihre Ergebnisse mit Ihnen diskutiert.

### 3.3.2 Messung an einem UKW-Empfänger

#### Allgemeine Hinweise zur Messung mit einem Digitaloszilloskop

Als Messgerät wird im praktischen Teil des Versuchs ein günstiges RTLSDR<sup>1</sup> in Kombination mit dem Open Source Framework GNU Radio<sup>2</sup> genutzt. RTLSDRs werden hier für den analogen Hochfrequenzteil eines Radioempfängers und die Analog-Digital-Wandlung genutzt. Die RTLSDRs sorgen dafür, dass das Analoge Hochfrequenzsignal korrekt gefiltert wird und ins Basisband heruntergemischt wird. Danach wird das Basisbandsignal analog-digital gewandelt. Die Eigenschaften der Hardware lassen sich hierbei in Software steuern, etwa die aktuelle Trägerfrequenz.

Die Signalverarbeitung findet nun digital und in Software implementiert, mithilfe von GNU Radio Komponenten, statt. Der Name Software-Defined-Radio (SDR) rührt daher, dass die gesamte Signalverarbeitung in Software stattfindet und damit die Eigenschaften des Radios definiert werden. Für den Versuch sind schon Flowgraphs, also Signalflussgraphen, zur Beschreibung der Signalverarbeitungsschritte vorbereitet worden. Jedem Interessierten sei an dieser Stelle die Anschaffung eines RTLSDR und das Experimentieren mit GNU Radio ans Herz gelegt. Die im Versuch verwendeten Flowgraphs sind auch online<sup>3</sup> zu finden.

---

<sup>1</sup>[www.rtl-sdr.com/](http://www.rtl-sdr.com/)

<sup>2</sup>[www.gnuradio.org/](http://www.gnuradio.org/)

<sup>3</sup>[github.com/bastibl/gr-rds](https://github.com/bastibl/gr-rds) und [github.com/jdemel/gr-rds](https://github.com/jdemel/gr-rds)

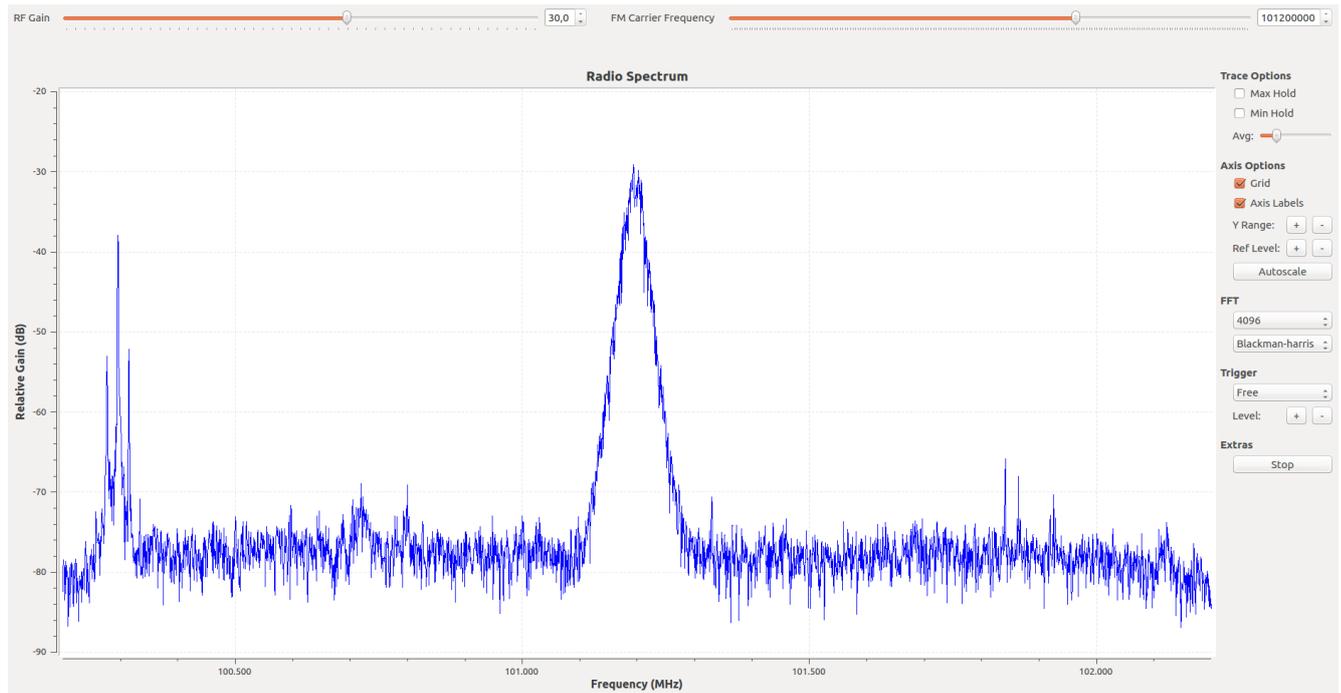


Figure 3.5: FM Spectrum

In diesem Versuch wird zunächst das UKW Band von 87 MHz bis 108 MHz für UKW-Radio betrachtet. Starten Sie nun den Flowgraph *fm\_spectrum*. Öffnen Sie dazu ein Terminal und rufen Sie den GNU Radio Companion mit `gnuradio-companion` auf. Nun öffnen Sie den Flowgraph *fm\_spectrum* im Unterordner *gnuradio*. Ein Druck auf den Button *Execute* führt diesen aus. In Bild 3.5 ist der Flowgraph *fm\_spectrum* zur Erkundung des Spektrums abgebildet. Hier wird die Signalstärke über der Frequenz mithilfe von FFTs dargestellt. Machen Sie sich zunächst mit dem Interface vertraut. Am oberen linken Rand kann der analoge Verstärkungsfaktor *RF Gain* des RTLSDR geregelt werden. Daneben lässt sich die Trägerfrequenz *FM Carrier Frequency* umstellen. Am rechten Rand können die Parameter für die Darstellung angepasst werden. Probieren Sie aus, wie das Verstellen des Sliders das Spektrum verändert und ebenso die Beschriftung auf der x-Achse angepasst wird.

### Messung des Antenneneingangssignals

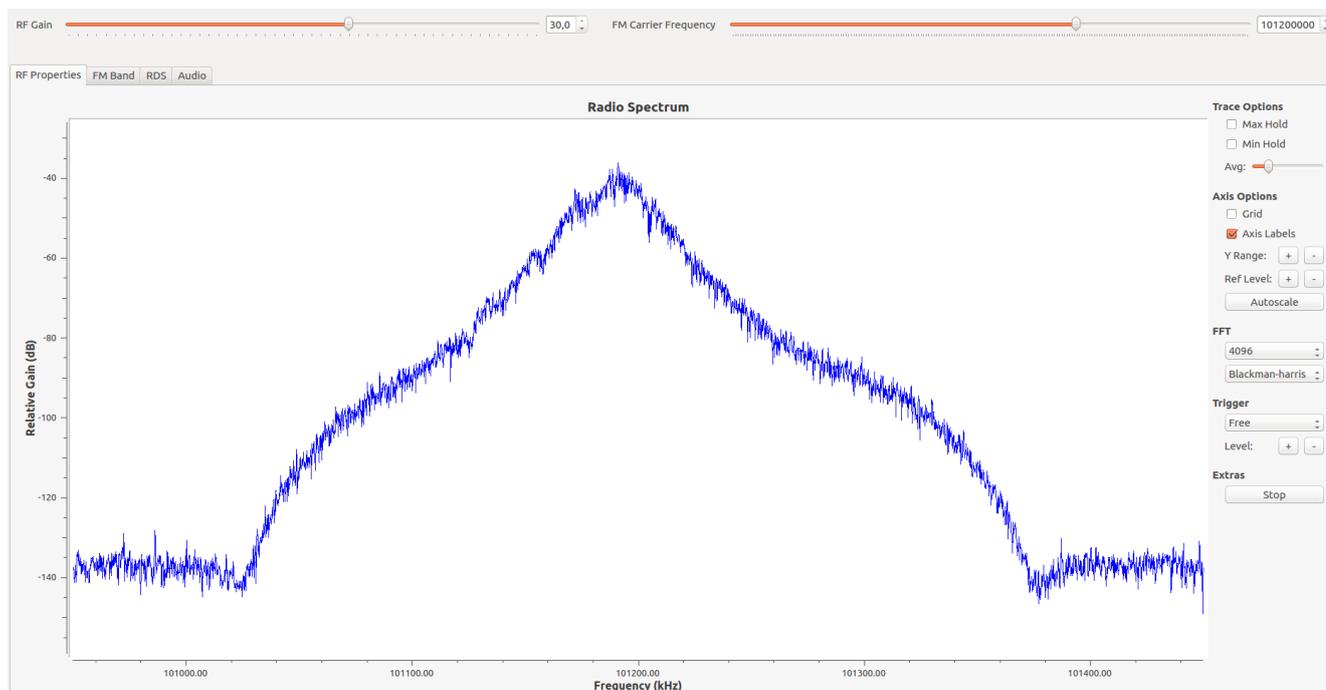
In diesem Punkt soll zunächst das Signal, wie es an der Antenne anliegt, gemessen werden. Die Sampling Rate des RTLSDRs ist auf 2 MSps eingestellt. Dementsprechend können im Basisband Frequenzen von  $-1$  MHz bis  $1$  MHz digital dargestellt werden. Durch das Heruntermischen des Signals entspricht dies dem Spektrum um die Trägerfrequenz. Das Samplingtheorem wird an dieser Stelle eingehalten, da ein komplexes Signal verarbeitet wird dessen Frequenzen  $|f| < 1$  MHz sind. Suchen sie nun im UKW Radio Band nach Frequenzen für Sender. Je nachdem wie schnell Sie die Trägerfrequenz ändern, ist es sinnvoll den *Avg* Slider anzupassen. Durch reduzierte Mittelung wird das Signal deutlich unruhiger, die Spektren der Sender sind stark zeitveränderlich. Die Linien schwacher Sender sind teilweise nicht mehr zu erkennen.

Zunächst sollen die Trägerfrequenzen aller UKW-Sender bestimmt werden, die im Spektrum zu erkennen sind. Bitte beachten Sie, dass die Leistung der Sender aufgrund unterschiedlicher Entfernungen und Sendeleistungen sehr unterschiedlich sein kann. Nutzen Sie den Trägerfrequenzslider um Frequenzen zu finden an denen Sie Sender vermuten. Erstellen Sie eine Tabelle mit diesen Frequenzen und halten Sie die

Stärke dieses Senders fest. Dabei genügt eine Einschätzung "gut", "mittel" oder "schwach". Rufen Sie einen Betreuer, um das aktuelle Bild zu besprechen.

## Überprüfung der Qualitätsschätzung

Die Abschätzung der Empfangsqualität soll durch die Audioqualität überprüft werden. Dazu wird der Flowgraph `fm_rds_alternate` genutzt.



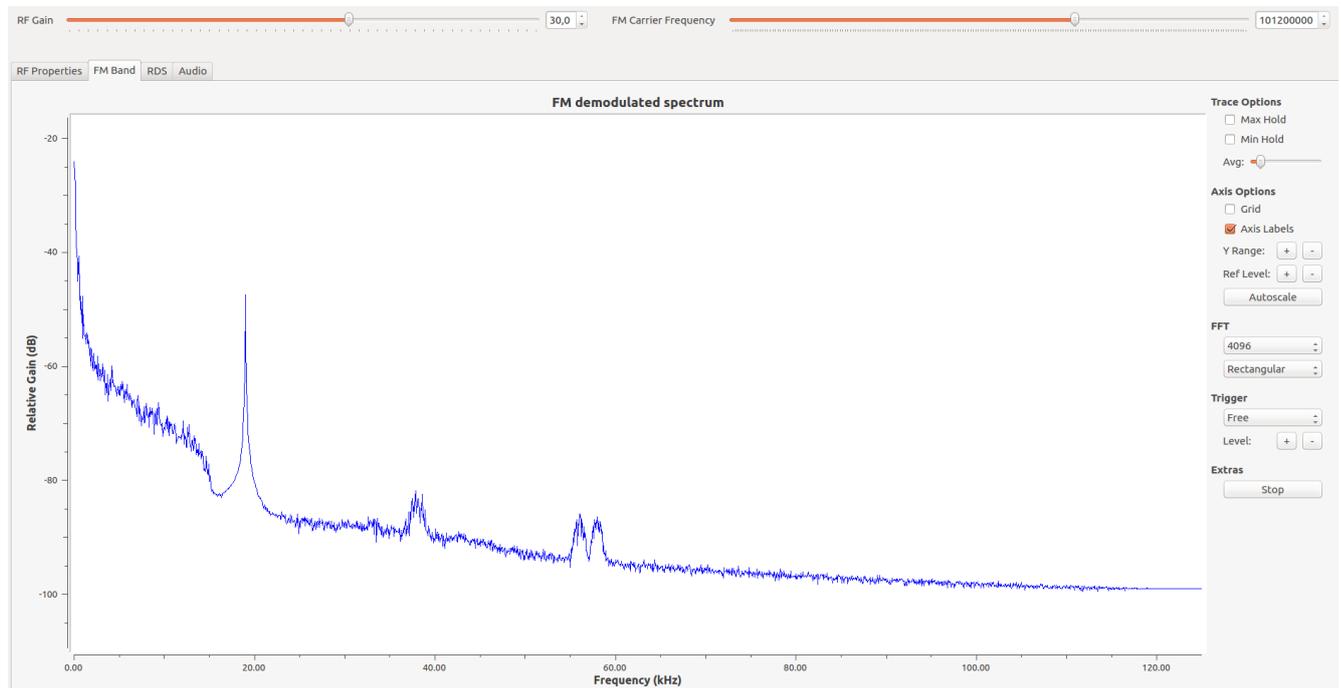
**Figure 3.6:** FM Empfangsspektrum

In Bild 3.6 wird die Oberfläche des Flowgraphs nach dem Start gezeigt. Es sind wieder die Slider für *RF Gain* und *FM Carrier Frequency* vorhanden. Schließen Sie die Kopfhörer an den Audioausgang des PCs an und bewerten Sie die Audioqualität für alle im vorherigen Versuchsteil gefundenen Sender. Gehen Sie nun zunächst zurück zum ersten Sender und dann durch den UKW Frequenzbereich und messen jeweils die Trägerfrequenz für jeden Sender, den Sie empfangen können. Nehmen Sie auch verrauschte Sender mit in Ihre Liste auf und notieren Sie die Empfangsqualität. Vergleichen Sie diese Liste mit der Liste vom vorherigen Aufgabenteil. Stimmen beide Listen bezüglich der Senderfrequenzen und Empfangsqualität überein? Markieren Sie die Unterschiede und suchen Sie Gründe dafür.

## Messung des Stereo-Multiplexsignals

Im nächsten Versuchspunkt soll das Stereo-Multiplexsignal betrachtet werden. Im UKW-Rundfunk geht es um den Stereoklang von Musik. Das Stereosignal wird mit zwei Mikrofonen aufgenommen, die links bzw. rechts positioniert sind. Entsprechend soll das Signal dann bei Stereo-Empfang über zwei Lautsprecher wiedergegeben werden. Dadurch, dass im Prinzip das gleiche Musikstück aufgenommen wurde, unterscheiden sich beide Signale kaum. Die Unterschiede sind je nach Musikstück unterschiedlich stark, aber insgesamt sicher nicht so deutlich wie im Versuch zur analogen Modulation. Aus diesem Grund wird das Differenzsignal im Spektrum schwächer ausfallen als das Summensignal.

Um diese Aussage zu überprüfen, wählen Sie bitte den Sender bei 88.3 MHz oder 89.7 MHz, da hier Musik läuft, die sich zur Analyse des Stereo-Multiplex gut eignet.



**Figure 3.7:** Demoduliertes FM Signal

Wechseln Sie nun zum Reiter *FM Band*, wie in Fig. 3.7 zu sehen. Es sollte nun das Spektrum eines Stereo-MPX-Signals zu erkennen sein. Der Effekt des Stereo-Multiplexsignals ist nur bei Musik und auch hier nicht immer auszumachen. Wenn Sie denken, ein aussagekräftiges Bild zu haben, drücken Sie den Button *Stop*. Welche Merkmale eines Stereo-MPX-Signals erkennen Sie? Welche Beobachtungen stimmen nicht ganz mit den Ergebnissen von Versuch 3 überein? Welche Spektrallinie können Sie nicht zuordnen? Messen Sie anhand dieses Spektrums die Grenzfrequenz des NF-Signals, die Frequenz des Hilfsträgers und die Mittenfrequenz des Differenzsignals. Bevor Sie diesen Teil des Versuchs beenden, sagen Sie einem Betreuer Bescheid, der Ihre Ergebnisse mit Ihnen diskutiert.

### Fähigkeiten des Flowgraphs

Der Flowgraph enthält zwei weitere Reiter, die im folgenden kurz vorgestellt werden. Der Reiter *RDS* dient der Analyse des Radio Data System<sup>4</sup> (RDS). Auf der linken Seite ist das Spektrum des RDS Signals zu sehen. Auf der rechten Seite sind die Empfangssymbole vor und nach der Symbolsynchronisation zu sehen. Das RDS Signal ist differentiell moduliert. Je nach Signal-zu-Rausch-Verhältnis sind die möglichen Sendesymbole hier ebenfalls klar erkennbar. Dies ist ein kurzer Ausblick auf die digitale Modulation, die in einem späteren Praktikum behandelt wird.

Der letzte Reiter *Audio* dient der Analyse des analogen Audiosignals. Dieser Reiter unterteilt sich in vier Grafiken. Links oben ist das reelle Audiosummensignal zu sehen. Rechts oben ist das entsprechende reelle Differenzsignal dazu platziert. Vergleichen Sie die Signalstärke während der Moderator spricht mit der während eines Musikstückes. Können Sie einen Unterschied erkennen? Links unten befindet sich das sogenannte DSB-SC Spektrum. Dieses enthält das beidseitige Stereodifferenzsignal.

<sup>4</sup>[en.wikipedia.org/wiki/Radio\\_Data\\_System](http://en.wikipedia.org/wiki/Radio_Data_System)

## Chapter 4

# Diskrete Signale und Systeme

**Edgar Beck**

NW1, Raum N2390, Tel.: 0421/218-62392

E-Mail: [beck@ant.uni-bremen.de](mailto:beck@ant.uni-bremen.de)

### 4.1 Motivation

In den letzten Jahrzehnten gewann der Begriff "digital" eine immense Bedeutung in unserer Gesellschaft. Nach dem Einzug der digitalen Signalverarbeitung am Ende der 50er Jahre ist sie aus den heutigen Forschungs- und Entwicklungslabors nicht mehr wegzudenken. Technische Realisierungen wie z.B. der Computer, das Smartphone, der Mobilfunk oder SD-Karten sind nur einige Anwendungen, die die Bedeutung von digitalen Signalen und Systemen widerspiegeln.

Um dem Studenten im Rahmen seiner Ingenieurausbildung einen Einstieg in die Thematik der digitalen Signalverarbeitung zu ermöglichen, besteht die Aufgabe dieses Versuchs in der Einführung von zeitdiskreten Signalen und Systemen. Es sollen die wichtigsten Zusammenhänge und Kenngrößen erarbeitet und anhand der Simulationsumgebung MATLAB konkret untersucht und angewandt werden.

Hierzu gliedert sich der Versuchsaufbau in eine theoretische Einführung von zeitdiskreten Signalen und Systemen, welche in den Abschnitten 1.1.2 bis 4.4 erfolgt. Anschließend werden im Abschnitt 4.5 zeitdiskrete Zufallsprozesse behandelt. Diese spielen unter anderem in der Nachrichtenübertragung eine wesentliche Rolle, da sowohl Störungen wie z.B. das thermische Rauschen als auch das zu sendende Signal als zufällige Signale aufzufassen sind. Im letzten Abschnitt findet dann die Zusammenführung von Zufallsprozessen mit zeitdiskreten Systemen statt.

Da bei der Versuchsdurchführung die elementaren Zusammenhänge analysiert und diskutiert werden sollen, ist es notwendig, die theoretischen Grundlagen der vorangegangenen Abschnitte zu kennen. Diese werden bei Versuchsbeginn in Form eines Kolloquiums abgefragt: Bei mangelhafter Kenntnis bzw. Vorbereitung gilt der Versuch als nicht bestanden! Werden von einer Gruppe nicht alle Aufgaben innerhalb der vorgegebenen Zeit erfolgreich bearbeitet, so hat diese ein Protokoll des Versuchs abzugeben, welches die noch fehlenden Ergebnisse sowie deren Interpretationen zusammenfasst.

Weitere Anregungen zur Ausführung des Versuchs, wie auch zur Thematik selber, werden gerne vom zuständigen Betreuer entgegengenommen.

## 4.2 Elementare zeitdiskrete Signale

Die elementaren zeitdiskreten Signale sind bereits im ersten Versuch in 1.1.2 eingeführt worden. Für die Durchführung dieses Versuchs sollen dieselben Definitionen verwendet werden.

## 4.3 Transformationen zeitdiskreter Signale

### 4.3.1 Zeitdiskrete Fourier-Transformation

Die zeitdiskrete Fouriertransformation ist ebenfalls im ersten Versuch, im Abschnitt 1.1.2 eingeführt worden. Sie wird auch hier wieder benötigt.

### 4.3.2 z-Transformation

#### Einführung und Definition

Zur Analyse und Synthese von Systemen wird sehr häufig anstelle der Fourier-Transformation die Laplace-Transformation,

$$\mathcal{L}\{x_K(t)\} = X_K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_K(t)e^{-st} dt. \quad (4.1)$$

verwendet. Die zugehörige Transformationsvariable  $s = \sigma + j\omega$  umfasst dabei die gesamte komplexe Ebene.

Es stellt sich nun die Frage, ob es nicht auch für zeitdiskrete Signale sinnvoll ist, eine Erweiterung der Transformationsvariablen  $\Omega$  auf die gesamte komplexe Ebene vorzunehmen.

Hierzu führt man die komplexe Transformationsvariable  $z$  ein, die durch die konforme Abbildung

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{(\sigma T+j\Omega)} \quad (4.2)$$

mit der Laplace-Variablen  $s$  verknüpft ist. Diese konforme Abbildung bildet die gesamte  $s$ -Ebene eindeutig und nichtlinear in die  $z$ -Ebene ab, wobei sich folgende Korrespondenzen ergeben (siehe Tabelle 4.1).

s-Ebene	z-Ebene
linke komplexe Ebene	Inneres d. Einheitskreises
imaginäre Achse	Einheitskreis
rechte komplexe Ebene	äußeres d. Einheitskreises
$s = 0$	$z = 1 + j0$
$s = f_A/2$	$z = -1 + j0$

**Table 4.1:** s-z Korrespondenzen

Die zugehörige z-Transformation ist dabei durch den Ausdruck

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x(k)\} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (4.3)$$

gegeben.

Die komplexe Variable  $z$  kann auch in der Form  $z = r \cdot \exp(-j\omega T)$  mit  $\omega T = \Omega$  geschrieben werden, so dass sich für die z-Transformation der Ausdruck

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)r^{-k}e^{-j\Omega k} \quad (4.4)$$

ergibt. Es ist zu erkennen, dass für den Fall  $|z| = r = 1$  die zeitdiskrete Fourier-Transformation Gl.(1.7) vorliegt. Mit anderen Worten, auf dem Einheitskreis sind zeitdiskrete Fourier-Transformation und z-Transformation identisch.

Fasst man die wichtigsten Aussagen dieses Abschnitts zusammen, so gilt:

- Zeitkontinuierliche Signale
  1. Aufgrund von Konvergenzproblemen der Fourier-Integrale erweitert man die Transformation auf die gesamte komplexe Ebene und erhält die Laplace-Transformation.
  2. Auf der imaginären Achse sind Fourier-Transformation und Laplace-Transformation identisch.
- Zeitdiskrete Signale
  1. Es wird die konforme Abbildung  $z = e^{sT}$  eingeführt und man erhält die z-Transformation, welche ein zeitdiskretes Signal in die komplexe z-Ebene transformiert.
  2. Auf dem Einheitskreis sind z-Transformation und zeitdiskrete Fourier-Transformation identisch.

## Konvergenz

Die z-Transformierte existiert, wenn die Summe in Gl.(4.3) konvergiert, d.h. , wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)z^{-k}| < \infty \quad (4.5)$$

gilt. Schreibt man Gl.(4.3) in den Ausdruck

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x(k)\} = \sum_{k=1}^{\infty} x(-k)z^k + \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left(\frac{1}{z}\right)^k \quad (4.6)$$

um, so stellen beide Teilsummen so genannte Taylorreihen über  $z$  bzw.  $1/z$  dar. Es kann gezeigt werden, dass Taylorreihen innerhalb eines Kreises  $|z| = r < R$  mit dem Radius  $R$  konvergieren. Angewandt auf die z-Transformierte bedeutet dies, dass das Konvergenzgebiet für  $X(z)$  ein ringförmiges Gebiet darstellt.

Ein Beispiel einer Taylorreihe ist die "geometrische Reihe"

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ fr } |z| < 1 \quad (4.7)$$

mit dem Konvergenzradius  $R=1$ .

Zur Darstellung der Konvergenzeigenschaften der  $z$ -Transformation wird im folgenden das Beispiel der Sprungfolge Gl.(1.3)

$$x_1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0, \end{cases}$$

und der antikausalen Sprungfolge

$$x_2(k) = \begin{cases} 0 & k \geq 0 \\ -1 & k < 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

d.h.  $x_1(k) - x_2(k) = 1 \quad \forall \quad k$  betrachtet. Mit Hilfe der "geometrischen Reihe" Gl.(4.7) gilt,

$$\mathcal{Z}\{x_1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{z}{z-1} \quad \forall \quad |z| > 1 \quad (4.9)$$

und

$$\mathcal{Z}\{x_2(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{z-1} \quad \forall \quad |z| < 1. \quad (4.10)$$

Die erhaltenen Ergebnisse lassen nun folgende wichtige Rückschlüsse zu:

- Die Angabe einer  $z$ -Transformierten ist immer nur im Zusammenhang mit einem Konvergenzgebiet eindeutig
- Da sich die Konvergenzgebiete von  $\mathcal{Z}\{x_1(k)\}$  und  $\mathcal{Z}\{x_2(k)\}$  nicht überlappen, existiert die  $z$ -Transformierte der Zahlenfolge  $x(k) = x_1(k) - x_2(k) = 1 \quad \forall \quad k$  nicht.

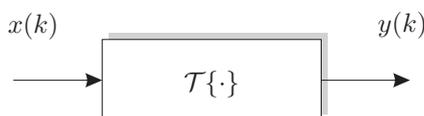
## 4.4 Zeitdiskrete Systeme

### 4.4.1 Eigenschaften

Ein zeitdiskretes System ist mathematisch als eine Transformation oder als ein Operator  $\mathcal{T}\{\cdot\}$  definiert, die bzw. der eine Eingangsfolge  $x(k)$  in eine Ausgangsfolge  $y(k)$  abbildet. Dies kann durch

$$y(k) = \mathcal{T}\{x(k)\} \quad (4.11)$$

oder durch Bild 4.1 ausgedrückt werden.



**Figure 4.1:** Zeitdiskretes System

In den folgenden Ausführungen werden ausschließlich lineare und zeitinvariante Systeme (LTI, *Linear Time Invariant*) betrachtet, d.h.

- **linear:** Es gilt das Superpositionsprinzip

$$\mathcal{T}\{a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)\} = a \cdot \mathcal{T}\{x_1(k)\} + b \cdot \mathcal{T}\{x_2(k)\}. \quad (4.12)$$

### Eigenschaften der z-Transformation

Operation	Folge	Transformierte
	$x(k)$	$X(z)$
	$y(k)$	$Y(z)$
Linearität	$a \cdot x(k) + b \cdot y(k)$	$a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$
Verschiebung	$x(k - k_0)$	$z^{-k_0} X(z)$
Spiegelung	$x(-k)$	$X(1/z)$
konjugiert Komplexe	$x^*(k)$	$X^*(z^*)$
Realteil	$Re\{x(k)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$
Imaginärteil	$Im\{x(k)\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$
Faltung	$x(k) * y(k)$	$X(z) \cdot Y(z)$
Modulation	$(z_0)^k \cdot x(k)$	$X(z/z_0)$
lin. Gewichtung	$k \cdot x(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
Anfangswert	$\lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z),$ wenn $X(z)$ existiert	
Endwert	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1+0} (z-1)X(z),$ wenn $X(z)$ für $ z  > 1$ existiert	

**Table 4.2:** Eigenschaften der z-Transformation

- **zeitinvariant:** Die Systemantwort hängt nicht vom Zeitpunkt der Erregung ab

$$y(k - k_0) = \mathcal{T}\{x(k - k_0)\}, \quad k_0 \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Zur Ermittlung elementarer Eigenschaften von Systemen verwendet man in der Praxis bestimmte Eingangssignale bzw. Eingangfolgen mit denen das jeweils zu analysierende System angeregt wird. Die wichtigsten Folgen,

- Impulsfolge  $\delta(k)$
- Sprungfolge  $\varepsilon(k)$
- komplexe Exponentialfolge,

wurden bereits in Abschnitt 1.1.2 eingeführt.

So wird z.B. für die Beschreibung des Zeitverhaltens eines Systems die Systemantwort auf die Erregung mit der Impulsfolge  $\delta(k)$ , d.h.

$$h(k) := \mathcal{T}\{\delta(k)\}.$$

betrachtet. Die Ausgangsfolge  $h(k)$  wird *Impulsantwort* des Systems genannt.

Die allgemeine Systemantwort eines LTI-Systems kann mit Hilfe von Gl.(4.11) wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \mathcal{T}\{x(k)\} = \mathcal{T}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(k-i)\right\} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\mathcal{T}\{\delta(k-i)\} : \textit{linear} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(k-i)h(i) : \textit{zeitinvariant} \\
 &= x(k) * h(k). \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

D.h. das Ausgangssignal ist als Faltungssumme von Eingangssignal und Impulsantwort darstellbar, wobei \* den Faltungsoperator bezeichnet.

#### 4.4.2 Frequenzgang

Um die Wirkung eines LTI-Systems im Frequenzbereich zu untersuchen, betrachtet man die Antwort auf die Erregung mit der komplexen Exponentialfolge

$$x(k) = e^{j\omega T k} = e^{j\Omega k}$$

nach Gl.(1.4). Eingesetzt in die Faltungsoperation nach Gl.(4.14) ergibt sich als Ausgangsfolge  $y(k)$  der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \mathcal{T}\{e^{j\Omega k}\} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega(k-i)}h(i) \\
 &= e^{j\Omega k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-j\Omega i}. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Der zweite Teil des Ausdrucks stellt dabei nach Gl.(1.7) die zeitdiskrete Fourier-Transformation der Impulsantwort  $h(k)$  dar, welche als der *Frequenzgang* eines Systems bezeichnet wird,

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}.$$

Eingesetzt in Gl.(4.15) erhält man schließlich die Ausgangsfolge zu

$$y(k) = \mathcal{T}\{e^{j\Omega k}\} = e^{j\Omega k} H(e^{j\Omega}). \tag{4.16}$$

Dies bedeutet, dass die Ausgangsfolge wiederum eine komplexe Exponentialfolge derselben Frequenz darstellt, die lediglich in der Amplitude und Phase durch den Frequenzgang  $H(e^{j\Omega})$  verändert wird. Mit anderen Worten gesagt, die komplexe Exponentialfolge stellt eine Eigenfunktion eines LTI-Systems dar. Dies ist eine typische Eigenschaft von linearen Systemen.

Der Frequenzgang  $H(e^{j\Omega})$  ist dabei nach Abschnitt 1.1.2 periodisch in  $\Omega = 2\pi$ .

Der Betrag  $|H(e^{j\Omega})|$  wird als *Amplitudengang* und die Phase  $\phi(\Omega)$  als *Phasengang* des Systems mit

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{-j\phi(\Omega)} \quad \text{bezeichnet.} \quad (4.17)$$

Um den Frequenzgang eines Systems zu messen, ist es nun möglich das System mit einer Exponentialschwingung einer Frequenz anzuregen und den Quotienten

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\mathcal{T}\{e^{j\Omega k}\}}{e^{j\Omega k}}, \quad (4.18)$$

zwischen Eingangs- und Ausgangssignal zu messen. Man erhält somit den Frequenzgang an der Frequenz des Eingangssignals. Durch das Variieren der Eingangsfrequenz ergibt sich somit der gesuchte Frequenzgang.

Analog zur Beziehung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal im Zeitbereich nach Gl.(4.14) kann durch Anwendung der zeitdiskreten Fourier-Transformation auf die Faltungssumme die Beziehung der Signale im Frequenzbereich angegeben werden. Es gilt:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega}).$$

Für beliebige Eingangssignale ist damit der Frequenzgang durch den Ausdruck

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \quad (4.19)$$

gegeben.

#### 4.4.3 Systemfunktion und Differenzgleichung

Der Frequenzgang  $H(e^{j\Omega})$  besitzt den Nachteil, dass er lediglich das Verhalten des Systems auf dem Einheitskreis ( $|e^{j\Omega}| = 1$ ) beschreibt. Aus systemtheoretischer Sicht ist es nun sinnvoll, ein System in der gesamten komplexen Ebene zu beschreiben. Hierzu bildet man die  $z$ -Transformierte nach Gl.(4.3) der Impulsantwort  $h(k)$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

und erhält die Systemfunktion  $H(z)$ . Wie bereits in Abschnitt(4.3.2) erläutert wurde, sind zeitdiskrete Fourier-Transformierte und  $z$ -Transformierte (Frequenzgang und Systemfunktion) für  $z = e^{j\Omega}$  also auf dem Einheitskreis identisch.

Die Systemfunktion eines LTI-Systems ist immer als Quotient aus Polynomen in  $z$  in der Form

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{n-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

bzw. in der Form

$$H(z) = b_m \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_{0j})}{\prod_{i=1}^n (z - z_{\infty i})} \quad (4.21)$$

darstellbar. Hierbei sind  $z_{0j}$  und  $z_{\infty i}$  die Nullstellen bzw. Polstellen der Systemfunktion  $H(z)$  und  $m$  der Zähler- bzw.  $n$  der Nennergrad.

Alternativ zur Impulsantwort  $h(k)$  und der Systemfunktion  $H(z)$  können zeitdiskrete Systeme auch durch eine Differenzgleichung mathematisch erfasst werden. Handelt es sich wie hier angenommen um ein LTI-System so besitzt die Differenzgleichung die Form

$$\sum_{i=0}^m a_i y(k - i + n) = \sum_{j=0}^n b_j x(k - j + n). \quad (4.22)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_j$  sind also zeitlich konstant und die Differenzgleichung linear. Vergleicht man die Differenzgleichung Gl.(4.22) mit der Systemfunktion nach Gl.(4.20), so ist zu erkennen, dass die Differenzgleichung und die Systemfunktion über die z-Transformation unter Anwendung des Verschiebungssatzes und der Linearität ineinander übergehen.

Wird z.B. die Systemfunktion

$$H(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3} = z^{-1} + z^{-3}$$

betrachtet, so besitzt dieses System die Differenzgleichung

$$y(k) = x(k - 1) + x(k - 3).$$

Weiterhin stellt der Nenner von  $H(z)$  den Anteil dar, welcher im System vom Ausgang zurückgekoppelt wird ( $y(k - i + n) \quad \forall \quad i = 1 \dots n$ ). Dieser so genannte *rekursive* Anteil ist für die Stabilität des Systems verantwortlich. Der Zähler beschreibt dementsprechend den Vorwärtszweig, also den *nicht rekursiven* Anteil.

#### 4.4.4 übersicht

Fasst man die wesentlichen Eigenschaften diskreter Systeme zusammen und charakterisiert sie anhand der Impulsantwort, Systemfunktion oder Differenzgleichung, so gilt:

- **Linearität:** lineare Differenzgleichung
- **Zeitinvarianz:** Koeffizienten der Differenzgleichung und von  $H(z)$  sind zeitinvariant
- **Kausalität,**

d.h., dass das Ausgangssignal  $y(k)$  zu einem Zeitpunkt  $k_0$  unabhängig ist von vorangegangenen Eingangssignalwerten  $x(k_0 + 1)$ ,  $x(k_0 + 2)$  etc.. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist:

$$h(k) = 0 \quad \forall \quad k < 0. \quad (4.23)$$

– für  $H(z)$  gilt:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} \quad (4.24)$$

- \* Es treten nur negative Potenzen von  $z$  auf, d.h. dass  $n \geq m$  gilt.
- \*  $H(z)$  beschreibt eine Taylorreihe in  $\frac{1}{z}$  und konvergiert damit außerhalb eines Kreises, siehe Abschnitt 4.3.2

- **BIBO-Stabilität,**

d.h. , dass für eine beschränkte Erregung  $x(k)$  eine beschränkte Ausgangsfolge  $y(k)$  vorliegt. Die notwendige und hinreichende Bedingung ist:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty. \quad (4.25)$$

- Systeme mit endlicher Impulsantwort sind immer stabil
- Für  $H(z)$  gilt:
  - \* Pole  $z_{\infty_i}$  für  $i = 1..N$  liegen im Einheitskreis,  $|z_{\infty_i}| < 1 \quad \forall \quad i = 1..N$
  - \* Einheitskreis gehört zum Konvergenzgebiet von  $H(z)$ , siehe Gl.(4.5)

## 4.5 Zeitdiskrete Zufallsprozesse

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Methoden vorgestellt, mit denen deterministische Signale beschrieben und die Übertragung solcher Signale über LTI-Systeme berechnet werden konnte. In den folgenden Abschnitten sollen diese Methoden auf nicht deterministische, d.h. zufällige Signale ausgedehnt werden. Zufallssignale können einerseits Nutzsignale sein (Sprachsignale, Musiksignale) oder auch Störsignale wie z.B. das thermische Rauschen eines Widerstands.

### 4.5.1 Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Verteilungsdichtefunktion

#### Zufallsvariable

Eine Variable  $X$ , die je nach dem Ausgang eines Versuchs, also in Abhängigkeit vom Zufall, verschiedene Werte annimmt, heißt eine Zufallsvariable (ZV).

Beispiele einer ZV sind

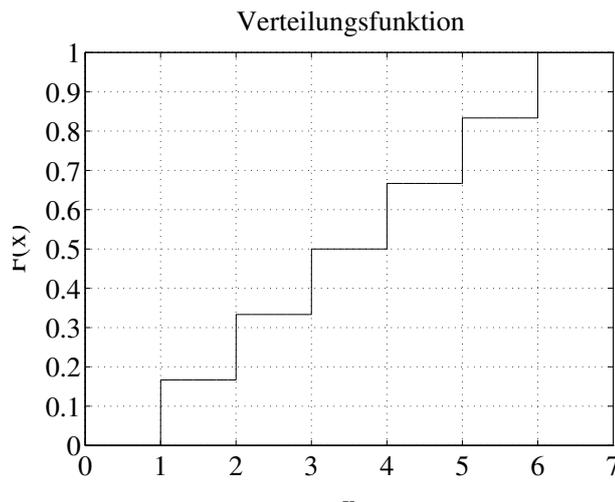
- der Amplitudenwert von thermischen Rauschen eines Widerstands
- die Augenzahl beim Würfeln.

Für die Praxis sind zwei Typen von Zufallsvariablen von besonderer Bedeutung, die kontinuierlichen (z.B. Rauschen) und die diskreten Zufallsvariablen (z.B. Augenzahl).

#### Verteilungsfunktion

Ausgehend von einer ZV kann nun für diese eine Wahrscheinlichkeit  $P$  angegeben werden, mit der sie einen gewissen Wert  $x_0$  nicht überschreitet, d.h.  $P(X \leq x_0)$ . Als Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  der ZV  $X$  definiert man die Funktion

$$F_X(x) := P(X \leq x). \quad (4.26)$$



**Figure 4.2:** Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  für Augenzahl beim Würfeln

Man erhält für das Beispiel der Augenzahl unter anderem  $P(X \leq 2) = 2/6$  oder  $P(X \leq 5) = 5/6$ . Die zugehörige Verteilungsfunktion ist in Bild 4.2 dargestellt.

Für die Verteilungsfunktion einer beliebigen ZV gilt immer:

$$F_X(\infty) = 1, \quad F_X(-\infty) = 0$$

### Verteilungsdichtefunktion

Wird wiederum von einer ZV  $X$  ausgegangen und die Wahrscheinlichkeit  $P(x \leq X < x + \Delta x) = F_X(x + \Delta x) - F_X(x)$  betrachtet, so ist die Verteilungsdichtefunktion (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) definiert als

$$f_X(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x},$$

bzw.

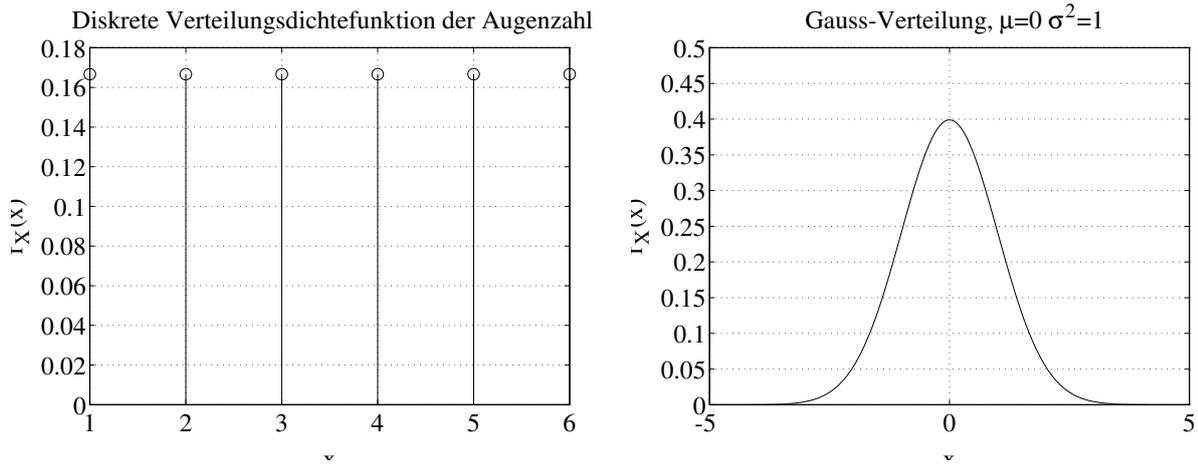
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (4.27)$$

Bei gegebener Dichte  $f_X(x)$  bzw. Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ZV in ein vorgegebenes halboffenes Intervall fällt aus Gl.(4.27) zu

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(\xi) d\xi. \quad (4.28)$$

Zur Ermittlung der Verteilungsdichtefunktion einer ZV, z.B. der Augenzahl beim Würfeln, führt man das Experiment Würfeln  $N$  mal durch (Stichprobe vom Umfang  $N$ ) und berechnet die relativen Häufigkeiten, wie oft die Augenzahl z.B. kleiner als zwei ist. Die Ergebnisse lassen sich als Histogramm grafisch darstellen. Für den theoretischen Fall  $N \rightarrow \infty$  ergibt sich aus dem Histogramm die zugehörige Verteilungsdichtefunktion.

Bild 4.3 zeigt die Verteilungsdichtefunktionen der beiden hier betrachteten Zufallsvariablen Augenzahl und Rauschen. Es ist deutlich der Unterschied einer diskreten und einer stetigen Zufallsvariablen zu erkennen.



**Figure 4.3:** Dichtefunktionen

Die Verteilungsdichtefunktion des thermischen Rauschens stellt den in der Praxis sehr wichtigen Fall einer *Gauß-Verteilung* dar, deren Verteilungsdichtefunktion durch den Ausdruck

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.29)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet  $\mu$  den Erwartungswert und  $\sigma^2$  die Varianz der Verteilung. Diese so genannten Momente werden im folgenden Abschnitt näher erläutert.

#### 4.5.2 Statistische Kenngrößen (Momente von Verteilungen)

Ausgehend von der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  oder der Verteilungsdichtefunktion  $f_X(x)$  lassen sich so genannte Momente der Verteilung angeben. Man definiert als:

- i-tes Moment

$$\mu_i := \int_{-\infty}^{\infty} x^i f_X(x) dx \quad (4.30)$$

- und als i-tes zentrales Moment

$$\alpha_i := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^i f_X(x) dx. \quad (4.31)$$

Hierbei ist nun zu beachten, dass diese Momente mit Hilfe der exakten Dichtefunktion  $f_X(x)$  berechnet werden. In der Praxis liegt diese jedoch aufgrund der endlichen Anzahl an Stichproben  $N$  nicht vor. Aus diesem Grunde werden die einzelnen Momente unter Verwendung von Schätzfunktionen ermittelt.

Im folgenden sind einige der wichtigsten Momente und ihre Schätzfunktionen gegenübergestellt.

##### 1. Erwartungswert/Mittelwert

- Erwartungswert:

$$E\{X\} = \mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (4.32)$$

- Mittelwert (geschätzter Erwartungswert):

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i) \quad (4.33)$$

## 2. Quadratischer Erwartungswert/Quadratischer Mittelwert

- Quadratischer Erwartungswert

$$E\{X^2\} = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \quad (4.34)$$

- Quadratischer Mittelwert

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(i) \quad (4.35)$$

## 3. Varianz/geschätzte Varianz

- Varianz

$$\sigma^2 = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f_X(x) dx \quad (4.36)$$

- geschätzte Varianz

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x(i) - \hat{\mu}_1)^2 \quad (4.37)$$

Hierbei bezeichnet  $x(i)$  den Wert, den die ZV  $X$  für die  $i$ 'te Stichprobe annimmt, wenn insgesamt das Experiment  $N$  mal durchgeführt wird.

Zwischen den eingeführten Momenten einer Verteilung existiert der sehr wichtige Zusammenhang

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - E\{X\}^2. \quad (4.38)$$

### 4.5.3 Statistische Unabhängigkeit, Summation und zentraler Grenzwertsatz

#### Statistische Unabhängigkeit

Betrachtet man  $n$  Zufallsvariablen, so besitzen diese Zufallsvariablen eine gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Diese so genannte Verbundverteilungsfunktion stellt eine Funktion von  $n$  Parametern  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dar.

Gegeben seien nun  $n$  Zufallsvariablen  $X_i$  für  $i = 1 \dots n$  mit einer Verbundverteilungsfunktion  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bzw. Verbundverteilungsdichtefunktion  $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Die  $n$  Zufallsvariablen heißen statistisch unabhängig, wenn

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad (4.39)$$

bzw.

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \quad (4.40)$$

gilt.

### Summe zweier statistisch unabhängiger Zufallsvariablen

Gegeben seien zwei statistisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_i$  für  $i = 1, 2$  mit der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F_{X_i}(x)$ . Die Zufallsvariable  $Y$  mit

$$Y = X_1 + X_2 \quad (4.41)$$

besitzt die Verteilungsdichtefunktion

$$f_Y(y) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2). \quad (4.42)$$

D.h. die Verteilungsdichtefunktion der Summe zweier statistisch unabhängiger Zufallsvariablen ergibt sich aus der Faltung der beiden Verteilungsdichtefunktionen der Zufallsvariablen.

### Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben seien  $N$  statistisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_i$  für  $i = 1 \dots N$  mit der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F_{X_i}(x)$  für alle  $X_i$ . Weiterhin besitzen alle Verteilungen die Varianz  $\sigma^2 = 1$  und den Erwartungswert  $E\{X\} = 0$ .

Es gilt [Pro95]:

Die Zufallsvariable  $Y$  mit

$$Y = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i \quad (4.43)$$

besitzt für  $N \rightarrow \infty$  die Verteilungsdichtefunktion

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (4.44)$$

d.h., sie ist gaußverteilt mit  $E\{Y\} = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ , was auch als *normalverteilt* bezeichnet wird.

#### 4.5.4 Zufallsprozesse und ihre Kenngrößen

Nach der Einführung von Zufallsvariablen soll nun noch zusätzlich die Zeit berücksichtigt werden. Mit anderen Worten, betrachtet man die Zeitachse und ordnet jedem diskreten Zeitpunkt  $k$  eine ZV  $X_k$  zu, so erhält man einen zeitdiskreten *stochastischen Prozess*  $\{x(k)\}$ . Somit liegt jedem Zeitpunkt eine Verteilungsdichtefunktion zu Grunde, aus der die jeweiligen Momente der ZV  $X_k$  berechnet werden können.

Ein Beispiel für einen diskreten Zufallsprozess ist das thermische Rauschen, bei dem zu jedem diskreten Zeitpunkt  $k$  eine Gauß-Verteilung nach Gl.(4.29) vorliegt.

Stochastische Prozesse können weiterhin komplexwertig oder reellwertig sein, wobei ein komplexwertiger Prozess als Summe zweier reellwertiger aufgefasst werden kann.

### Stationarität

Sind alle Momente der Zufallsvariablen  $X_k$  für alle diskreten Zeitpunkte  $k$  dieselben, so ist der Prozess im strengen Sinne stationär (*SSS, Strong Sense Stationary*).

Wird lediglich gefordert, dass der Erwartungswert  $E\{X_k\}$  zeitlich unabhängig ist und die Autokorrelationsfunktion, siehe Gl.(4.45), nur von der Zeitdifferenz  $\kappa$  abhängt, so wird dieser prozess als stationär im weiteren Sinne (*WSS, Wide Sense Stationary*) bezeichnet.

Ist ein prozess stationär, so kann er zusätzlich die Eigenschaft der Ergodizität aufweisen. Dies bedeutet, dass die mittels der Verteilungsdichtefunktion der Zufallsvariablen berechneten Momente auch über die Zeitvariable  $k$  berechnet werden können. Im Rahmen dieses Versuchs soll auf diese Eigenschaft jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Für die folgenden Betrachtungen wird nun prinzipiell immer von *WSS*-Prozessen ausgegangen.

### Autokorrelation- und Kreuzkorrelationsfolgen

Die Autokorrelationsfolge eines Zufallsprozesses  $\{x(k)\}$  ist definiert als

$$r_{xx}(\kappa) := E\{X_k^* \cdot X_{k+\kappa}\}. \quad (4.45)$$

Für den Fall  $\kappa = 0$  gilt mit Gl.(4.38)

$$r_{xx}(0) = E\{|X_k|^2\} = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2, \quad (4.46)$$

mit  $\mu_x = E\{X\}$ . Da der Term  $E\{|X_k|^2\}$  die mittlere Leistung eines Prozesses darstellt, ist diese somit durch den Wert der Autokorrelationsfolge für  $\kappa = 0$  gegeben.

Weiterhin besitzt die Autokorrelationsfolge die Eigenschaft, dass sie *konjugiert gerade* ist, d.h.

$$r_{xx}(-\kappa) = r_{xx}^*(\kappa) \quad (4.47)$$

gilt.

Betrachtet man zwei stationäre Zufallsprozesse  $\{x(k)\}$  und  $\{y(k)\}$  so ist die Kreuzkorrelationsfolge definiert als

$$r_{xy}(\kappa) := E\{X_k^* \cdot Y_{k+\kappa}\}. \quad (4.48)$$

Bezüglich ihrer Symmetrieeigenschaften gilt:

$$r_{xy}(-\kappa) = r_{yx}^*(\kappa). \quad (4.49)$$

### Autokovarianz- und Kreuzkovarianzfolgen

In vielen Anwendungsfällen interessiert man sich für die zentralen Momente. Auch hier lässt sich analog zur Autokorrelationsfolge eines Prozesses  $\{x(k)\}$  die so genannte Autokovarianzfolge

$$\begin{aligned} c_{xx}(\kappa) &:= E\{(X_k^* - \mu_x^*) \cdot (X_{k+\kappa} - \mu_x)\} \\ &= r_{xx}(\kappa) - |\mu_x|^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

definieren. Entsprechend gilt für die Kreuzkovarianzfolge zweier Prozesse

$$\begin{aligned} c_{xy}(\kappa) &:= E\{(X_k^* - \mu_x^*) \cdot (Y_{k+\kappa} - \mu_y)\} \\ &= r_{xy}(\kappa) - \mu_x^* \mu_y. \end{aligned} \quad (4.51)$$

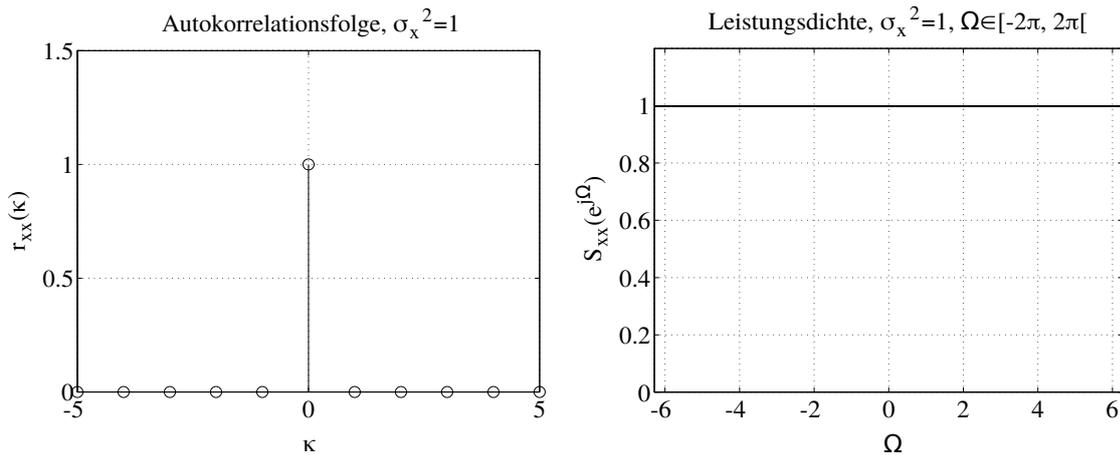


Figure 4.4: Autokorrelationsfolge und spektrale Leistungsdichte eines weißen Prozesses

### Korrelation und Orthogonalität

In diesem Abschnitt sollen kurz zwei der wesentlichen Eigenschaften von Zufallsprozessen, die Korrelation und die Orthogonalität erörtert werden.

Ist die Kreuzkovarianzfolge  $c_{xy}(\kappa)$  nach Gl.(4.51) zweier Prozesse identisch Null, d.h. gilt

$$c_{xy}(\kappa) = 0 \quad \forall \quad \kappa, \quad (4.52)$$

dann sind die Zufallsvariablen  $X_k$  und  $Y_k$  der Prozesse für alle  $k$  unkorreliert. Somit sind auch die beiden Prozesse  $\{x(k)\}$  und  $\{y(k)\}$  unkorreliert.

Für die Kreuzkorrelationsfolge ergibt sich für unkorrelierte Prozesse mit Gl.(4.51) die Beziehung

$$r_{xy}(\kappa) = \mu_x^* \mu_y. \quad (4.53)$$

Entsprechend kann man auch die Korrelationseigenschaften eines Prozesses anhand der Autokovarianzfolge nach Gl.(4.50) angeben. Besitzt  $c_{xx}(\kappa)$  die Form

$$c_{xx}(\kappa) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.54)$$

d.h. stellt die Autokovarianzfolge eine Impulsfolge der Höhe  $\sigma_x^2$  dar, dann sind die Zufallsvariablen des zugrundeliegenden Prozesses unkorreliert. Ein solcher Prozess wird als *weiß* bezeichnet und seine Varianz beträgt  $\sigma_x^2$ . Bild 4.4 zeigt die Autokovarianzfolge eines weißen (mittelwertfreien) Prozesses.

Weiterhin gelten folgende wichtige Zusammenhänge zwischen der Korrelation und der statistischen Unabhängigkeit:

- Sind zwei beliebige Prozesse statistisch unabhängig, so sind sie auch unkorreliert.
- Der Umkehrschluss gilt nur für gaußverteilte Prozesse, d.h. sind zwei gaußverteilte Prozesse unkorreliert, so sind sie auch statistisch unabhängig.

Schließlich nennt man zwei Prozesse *orthogonal* bei Gültigkeit von

$$r_{xy}(\kappa) = 0 \quad \forall \quad \kappa, \quad (4.55)$$

d.h., wenn die Kreuzkorrelationsfolge identisch Null ist. Mit Gl. (4.53) gilt, dass zwei unkorrelierte Prozesse orthogonal sind, wenn mindestens ein Mittelwert Null ist.

### 4.5.5 Spektrale Darstellung zeitdiskreter stochastischer Prozesse

Zeitdiskrete Signale bzw. Folgen  $x(k)$  kann man, wie bereits ausgeführt mit Hilfe der zeitdiskreten Fourier-Transformation, in den Frequenzbereich transformieren. Es ist zu beachten, dass die Anwendung der Fourier-Transformation auf Zufallssignale auf Grund der Konvergenzvoraussetzung der Integrale nicht möglich ist. Um dennoch eine Aussage über die spektralen Eigenschaften von Zufallssignalen zu erhalten ist die Transformation der Autokorrelationsfolge  $r_{xx}(\kappa)$  möglich (*Wiener-Khintchine-Theorem*). D.h.,

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\kappa) e^{-j\Omega\kappa} \quad (4.56)$$

gilt. Dabei wird  $S_{xx}(e^{j\Omega})$  als die spektrale *Autoleistungsdichte* des Prozesses  $x\{k\}$  bezeichnet.

Unter der oben getroffenen Annahme stationärer Prozesse ist die Autokorrelationsfolge konjugiert gerade. Die spektrale Autoleistungsdichte ist stets eine reelle Funktion,

$$S_{xx}(e^{j\Omega}) \in \mathbb{R}. \quad (4.57)$$

Dies bedeutet, dass anhand der Autoleistungsdichte eines Prozesses keine Aussage über die Phase möglich ist. Für den Fall eines weißen Zufallsprozesses ist in Bild 4.4 die Autoleistungsdichte dargestellt.

In vielen Anwendungsfällen ist die Leistung eines Zufallsprozesses eine entscheidende Größe, z.B. zur Ermittlung eines Signal-Rauschabstands bei der Übertragung von Signalen. Hierbei kann die Berechnung zum einen im Zeitbereich oder im Frequenzbereich durchgeführt werden. Mit Gl.(4.46) und der inversen diskreten Fourier-Transformation von  $S_{xx}(e^{j\Omega})$  gilt

$$E\{|X_k|^2\} = r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\Omega}) d\Omega. \quad (4.58)$$

## 4.6 Zeitdiskrete Zufallsprozesse und zeitdiskrete LTI-Systeme

### 4.6.1 Korrelationsfolgen und Leistungsdichtespektren des Ausgangsprozesses

Der letzte Abschnitt befasst sich mit der Übertragung eines stochastischen Prozesses über ein LTI-System, d.h. der Zusammenführung von Systemen und Zufallsprozessen.

Ausgehend von der elementaren Eigenschaft eines LTI-Systems, dass die Ausgangsfolge  $y(k)$  durch die Faltungssumme

$$y(k) = x(k) * h(k)$$

nach Gl.(4.14) zwischen Eingangsfolge  $x(k)$  und Impulsantwort  $h(k)$  darstellbar ist, können folgende Korrelationsfolgen und ihre spektralen Leistungsdichten berechnet werden.

Die Autokorrelationsfolge  $r_{yy}(\kappa)$  des Ausgangsprozesses ist durch den Ausdruck

$$r_{yy}(\kappa) = r_{hh}^E(\kappa) * r_{xx}(\kappa) \quad (4.59)$$

gegeben. Da die Impulsantwort ein deterministisches Energiesignal darstellt bezeichnet man den Ausdruck

$$r_{hh}^E(\kappa) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h^*(i)h(i+\kappa) \quad (4.60)$$

als *Energiekorrelationsfolge*.

Man erhält also die Autokorrelationsfolge des Ausgangsprozesses durch Faltung der Autokorrelationsfolge des Eingangsprozesses mit der Energiekorrelationsfolge der Impulsantwort.

Durch Anwendung der zeitdiskreten Fourier-Transformation auf Gl.(4.59) folgt im Frequenzbereich der Zusammenhang

$$S_{yy}(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|^2 S_{xx}(e^{j\Omega}). \quad (4.61)$$

Analog zur Autokorrelationsfolge kann auch die Kreuzkorrelationsfolge zwischen dem Eingangsprozess und dem Ausgangsprozess berechnet werden. Es gilt:

$$r_{xy}(\kappa) = h(\kappa) * r_{xx}(\kappa) \quad (4.62)$$

im Zeitbereich und im Frequenzbereich

$$S_{xy}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) S_{xx}(e^{j\Omega}). \quad (4.63)$$

## 4.6.2 Systemidentifikation

Eine der bekanntesten Anwendungen der hier dargestellten Zusammenhänge ist die so genannte *Systemidentifikation*. So ist es z.B. bei der Übertragung von Daten über einen Kanal (z.B. Mobilfunkkanal beim D-Netz) von großem Vorteil, wenn die Impulsantwort des Kanals am Empfänger bekannt ist. Eine Möglichkeit besteht nun darin, dass als Eingangsprozess ein weißer und mittelwertfreier Prozess verwendet wird. Die Autokorrelationsfolge stellt somit nach Gl.(4.54) eine Impulsfolge

$$r_{xx}(\kappa) = \begin{cases} \sigma_x^2 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0, \end{cases} \quad (4.64)$$

dar.

Unter der Annahme, dass es möglich ist, am Ausgang des Systems auf das Eingangssignal zurückzugreifen, kann die Impulsantwort mit Gl.(4.62) und Gl.(4.64) berechnet werden durch

$$h(\kappa) = \frac{r_{xy}(\kappa)}{\sigma_x^2}, \quad (4.65)$$

bzw. der Frequenzgang mit Hilfe von

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{S_{xy}(e^{j\Omega})}{\sigma_x^2}. \quad (4.66)$$

Ist es hingegen nicht möglich den Eingangsprozess zu verwenden, so kann mit Hilfe der Autokorrelationsfolge des Ausgangs lediglich der Betrag des Frequenzgangs ermittelt werden, nicht aber die Phase. Es gilt:

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = \frac{S_{yy}(e^{j\Omega})}{\sigma_x^2}. \quad (4.67)$$

## 4.7 Versuchsdurchführung

### 4.7.1 Vorbemerkungen

- Geben Sie in MATLAB nach jeder Aufgabe die Befehlsfolge  
`close all`  
`clear all`  
 ein.

In den folgenden drei Aufgaben werden zeitdiskrete Systeme analysiert. Bei der Darstellung der Pole und Nullstellen in der komplexen  $z$ -Ebene gelten die folgenden üblichen Symbole:

- Pole  $\hat{=}$   $\times$
- Nullstellen  $\hat{=}$   $\circ$

### Aufgabe 1: Zeitdiskrete Systeme

Geben ist die Differenzgleichung eines LTI-Systems

$$y(k) = x(k) + x(k+1) + x(k+2) + x(k+3). \quad (4.68)$$

- a)
  - Berechnen sie mit Hilfe der Beziehungen nach Glg.(4.22) und Glg.(4.20) die Systemfunktion  $H(z)$ .
  - Geben Sie die Polstellen (POL) und Nullstellen (NST) von  $H(z)$  an.  
(Matlab-Befehl: `roots`)
- b) Laden Sie das gegebene System in MATLAB (Befehl `imp_trans_pz_1`).
  - Ist das hier betrachtete System reellwertig? Begründung!
  - Welche Bedingung erfüllt die Übertragungsfunktion, wenn das System reellwertig ist?
  - Welchen typischen Verlauf besitzt der Amplitudengang  $|H(e^{j\Omega})|$ ?
  - Ordnen Sie die NST'en von  $|H(e^{j\Omega})|$  den NST'en im  $z$ -Diagramm zu.
  - Geben Sie eine Begründung an, warum das System nicht kausal ist.
- c) Im weiteren sollen nun Polstellen mit  $z_{\infty} = 0$  zugefügt werden.  
(In MATLAB Aufruf `imp_trans_pz_1(n)`, wobei  $n$  die Anzahl der Pole ist.)
  - Wieviele Polstellen sind mindestens einzufügen, wenn das System kausal sein soll?
  - Wie lautet für diesen Fall die Systemfunktion  $H(z)$ ?
  - Berechnen Sie für diesen Fall die zeitdiskrete Impulsantwort.
  - Warum ändert sich trotz geänderter Impulsantwort der Betrag der Übertragungsfunktion nicht?

### Aufgabe 2: Stabilität zeitdiskreter Systeme

Laden Sie durch den MATLAB-Aufruf `imp_pz_2` ein neues System.

- a) Ordnen Sie die Polstellen und NST'en den Frequenzen im Amplitudengang  $|H(e^{j\Omega})|$  zu.
- b) Verschieben Sie den Pol  $z_{\infty} = 0.48$  in Richtung des Einheitskreises und darüber hinaus.  
MATLAB-Aufrufe `imp_pz_2(0.8)`, `imp_pz_2(1.0)`, `imp_pz_2(1.1)`, usw.
  - Beobachten Sie bei der Verschiebung die Impulsantwort des Systems.  
Welche Eigenschaft des Systems verändert sich durch die Verschiebung?
- c) Am Eingang des Systems liegt nun das zeitdiskrete Signal

$$x(k) = e^{j k \frac{\pi}{2}} + e^{j k \frac{\pi}{10}} + 1$$

an. Geben Sie mit Hilfe der Eigenschaft nach Glg.(4.16) das Ausgangssignal  $y(k)$  an (Beträge und Phasen der Übertragungsfunktion können abgelesen werden).

### Aufgabe 3: Spezielle zeitdiskrete Systeme

Laden Sie durch den MATLAB-Aufruf `pz_3a` ein neues System.

- a)
- Geben Sie die Polstellen und NST'en des Systems an (Vielfachheit Eins).
  - Berechnen Sie die Systemfunktion  $H(z)$  nach Glg.(4.21) mit  $b_M = 1$ .
  - Für dieses System besteht zwischen den Polstellen und NST'en der Zusammenhang

$$z_{0\nu} = 1/z_{\infty\nu}^*.$$

Welche Eigenschaft besitzt der Frequenzgang  $H(e^{j\Omega})$  für diese Pol-Nullstellenlagen und erklären Sie diese Eigenschaft anschaulich?

- Welche Anwendung findet dieses System in der Nachrichtentechnik?

- b) Laden Sie durch den MATLAB-Aufruf `pz_3b` ein neues System.

Dieses System besitzt einen vierfachen Pol bei  $z_\infty = 0$  und NST'en bei  $z_{01} = 1 + j$ ,  $z_{02} = 1 - j$ ,  $z_{03} = 1/(1 - j)$  und  $z_{04} = 1/(1 + j)$ .

- Ist das System komplex- oder reellwertig?
- Ist das System kausal?
- Ist das System stabil?
- Für dieses System besteht zwischen den NST'en der Zusammenhang

$$z_{01} = 1/z_{03}^*, \quad z_{02} = 1/z_{04}^*$$

Welche Eigenschaft besitzt die Phase von  $H(e^{j\Omega})$  für diese Nullstellenlagen und erklären Sie diese Eigenschaft anschaulich?

Wie müssen die Pole für diese Systemeigenschaft notwendigerweise liegen?

- Welche Anwendung findet dieses System in der Audiotechnik?

### Aufgabe 4: Zufallsvariable, Verteilungsfunktion, Verteilungsdichtefunktion

Gegeben ist die Verteilungsdichtefunktion  $f_{X_1}(x_1)$  der Zufallsvariable  $X_1$  mit

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}} \quad (4.69)$$

- Geben Sie die Varianz, den Erwartungswert und den quadratischen Mittelwert der Zufallsvariable an.
- Führen Sie die weiteren Schritte für die Fälle  $N = 10^2, 10^3, 10^4$  durch:
  - Erzeugen Sie  $N$  Werte einer gaußverteilten Zufallsvariablen  $X_2$ .  
(Befehl: `x2=randn(N,1)`)
  - Geben Sie für jeden Fall den geschätzten Erwartungswert und die geschätzte Varianz an (Tabelle).  
(Befehle: `mu=mean(x2)`; `sigma_quadrat=var(x2)`;) )
  - Stellen Sie für jeden Fall das jeweilige Histogramm der Verteilung dar.  
(Befehle: `figure`; `[d,x] = hist(x2,100)`; `bar(x,d,'w')` für alle drei Fälle)

- Geben Sie einen analytischen Ausdruck für die Verteilungsdichtefunktion  $f_{X_2}(x_2)$  der Zufallsvariable  $X_2$  an.  
Wie nennt man diese spezielle Verteilung?
- Geben Sie den Zusammenhang an, wie aus der Zufallsvariablen  $X_2$  die Zufallsvariable  $X_1$  berechnet werden kann.

### Aufgabe 5: Summation von Zufallsvariablen, Zentraler Grenzwertsatz

Im folgenden sind  $I$  voneinander statistisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_i \forall i = 0 \dots I - 1$  gegeben. Die Zufallsvariablen sind alle gleichverteilt im Intervall  $[0,1[$  mit dem Erwartungswert  $E\{X_i\} = 0.5$  und der Varianz  $\sigma^2 = 1/12 \forall i$ .

- a) Für die Summation zweier Zufallsvariablen

$$Y = X_1 + X_2 \quad (4.70)$$

gilt für die Verteilungsdichtefunktion

$$f_Y(y) = f_{X_1}(x_1) * f_{X_2}(x_2), \quad (4.71)$$

d.h. die Verteilungsdichtefunktion von  $Y$  ergibt sich aus der Faltungssumme der einzelnen Verteilungsdichtefunktionen von  $X_1$  und  $X_2$ .

- Skizzieren Sie die Verteilungsdichtefunktion  $f_{X_i}(x_i)$ .
- Skizzieren Sie die Verteilungsdichtefunktion  $f_Y(y)$  mit Hilfe von Glg.(4.71).
- Für die folgenden Teilaufgaben werden  $N = 10^4$  Stichproben verwendet
  - Erzeugen Sie zwei voneinander statistisch unabhängige Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  und die Zufallsvariable  $Y = X_1 + X_2$   
Befehle:  

```
x1=rand(10000,1);
x2=rand(10000,1);
y=x1+x2;
```
  - Stellen Sie die Histogramme der Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  und  $Y$  dar  
Befehle:  

```
figure; [d,x] = hist(x1,100);
bar(x,d,'w');
figure; [d,x] = hist(x2,100);
bar(x,d,'w');
figure; [d,x] = hist(y,100);
bar(x,d,'w');
```
- Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren Skizzen

- b) Sei nun

$$Y = \sum_{i=1}^I X_i \quad \text{fr } I = 3, 10, 10^2$$

- Stellen Sie die Verteilungsdichtefunktion  $f_{X_i}(x_i)$  und  $f_Y(y)$  für alle Werte von  $I$  graphisch dar, und schreiben Sie in einer Tabelle die jeweiligen geschätzten Erwartungswerte und Varianzen auf.  
(Befehl: `grenz(I, 'u')`)
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem (geschätzten) Erwartungswert bzw. der (geschätzten) Varianz der Zufallsvariable  $X_i$  und denen der Zufallsvariable  $Y$ .

c) Sein nun

$$Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_{i=1}^I X_i \quad \text{für } I = 3, 10, 10^2$$

Gehen Sie wie in Teilaufgabe 5.b vor, wobei der (Befehl: `grenz(I, 'n')`) anzuwenden ist.

- Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen den (geschätzten) statistischen Kenngrößen Erwartungswert bzw. Varianz der Zufallsvariablen  $Y, X_i$ ?

### Aufgabe 6: Unkorrelierte/Korrelierte Prozesse

Gegeben ist ein stationärer Zufallsprozess  $\{x(k)\}$  dessen Zufallsvariablen  $X_k$  folgende Eigenschaften besitzen:

- gaußverteilt mit  $E\{X_k\} = 0$  und  $\sigma^2 = 1$
  - unkorreliert (da gaußverteilt: statistisch unabhängig)
- a)
- Skizzieren Sie die Autokovarianzfunktion  $c_{xx}(\kappa)$ .
  - Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum  $S_{xx}(e^{j\Omega})$  im Intervall  $[-\pi, \pi]$ .
  - Geben Sie drei Möglichkeiten zur Berechnung der Leistung an. Welche Leistung besitzt der hier vorgegebene prozess?
- b) Der prozess  $\{x(k)\}$  wird auf ein System gegeben, dessen Amplitudengang durch den Ausdruck

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 0.5 & \Omega_g/2 \leq |\Omega| < \Omega_g \\ 1 & |\Omega| < \Omega_g/2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.72)$$

bestimmt ist.

- Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems.
- Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses  $\{y(k)\}$  mit Hilfe von Glg.(4.61).
- Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion  $r_{yy}(\kappa)$ .  
Hinweis:

$$\text{rect}\left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right) \bullet \text{---} \circ \frac{\Omega_g}{\pi} \text{si}(\Omega_g \kappa)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Der prozess  $\{x(k)\}$  wird nun auf ein System gegeben, dessen Amplitudengang durch den Ausdruck

$$|H(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_g \\ 0.5 & |\Omega| = \Omega_g, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.73)$$

bestimmt ist.

- Skizzieren Sie den Amplitudengang des Systems.
- Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses  $\{y(k)\}$  mit Hilfe von Glg.(4.61) und geben Sie die Leistung des Ausgangsprozesses unter Verwendung von Glg.(4.58) an.
- Für die folgenden Teilaufgaben werden  $N = 10^4$  Werte eines Zufallsprozesses  $\{x(k)\}$  erzeugt und auf das System nach Glg.(4.73) gegeben. Die normierte Grenzfrequenz des Systems soll dabei die Werte  $\Omega_g = 0.5; 1.5; 2.5$  annehmen.
  - Stellen Sie für die beiden Prozesse  $\{x(k)\}$  und  $\{y(k)\}$  jeweils die Autokovarianzfunktion und das Leistungsdichtespektrum sowie den Amplitudengang des Systems im Intervall  $[-\pi \quad \pi[$  dar.

Befehl:

`noise( $\Omega_g$ );`

- Bestimmen Sie die jeweiligen geschätzten quadratischen Mittelwerte (Leistung) der Prozesse und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den analytisch berechneten.
- Erklären Sie sich anschaulich den Zusammenhang zwischen den Leistungsdichtespektren und dem Amplitudengang des Systems.
- Betrachten Sie die Autokovarianzfolge des Ausgangsprozesses. Welchen typischen Verlauf besitzt die Folge? Erklären Sie anschaulich den Verlauf der Folge (Hinweis: Der Eingangsprozess ist mittelwertfrei und die Faltung zweier si-Folgen ist wieder eine si-Folge)
- Betrachten Sie wiederum die Autokovarianzfolgen der Prozesse. Welche Aussage kann dabei über das Korrelationsverhalten des Ausgangsprozesses bei Veränderung der Grenzfrequenz  $\Omega_g$  getroffen werden?

### Zusatzaufgabe 7\*: Systemidentifikation

*Hinweis: Wenn noch etwas Zeit ist, sollte diese Aufgabe bearbeitet werden.*

Zur Identifikation eines LTI-Systems wird ein stationärer und mittelwertfreier Eingangsprozess  $\{x(k)\}$  mit der Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(\kappa) = \begin{cases} P_{xx} & \kappa = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.74)$$

verwendet.

- a) Mit Hilfe von  $\{x(k)\}$  soll die Impulsantwort  $h(k)$  des Systems ermittelt werden. Welche Möglichkeit besteht prinzipiell, und erfüllt der hier verwendete Eingangsprozess die notwendigen Voraussetzungen? Geben Sie einen mathematischen Ausdruck zur Ermittlung der Impulsantwort an.

b) Die Befehlsfolge für die folgenden Teilpunkte lautet:

- Bestimmen Sie die Leistung  $P_{xx}$  des verwendeten Eingangsprozesses. Bestimmen Sie außerdem den Bereich  $[-\kappa_p \ \kappa_p]$ , in dem die Autokorrelationsfunktion die Form eines Dirac-Impulses annimmt.
- Testen Sie die Möglichkeit zur Systemidentifikation mit Hilfe der dargestellten Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(\kappa) = \begin{cases} P_{xx} & \kappa = 0 \\ 0 & -\kappa_p \leq \kappa \leq \kappa_p \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.75)$$

indem Sie unterschiedlich lange Impulsantworten (Vektoren  $\mathbf{h}$ ) vorgeben.

- Welche Länge darf die Impulsantwort maximal besitzen, wenn der hier vorgegebene Eingangsprozess verwendet wird?

Hinweise:

$\mathbf{h}=[h(1) \ h(2) \ h(3) \ \dots]$ ; für die Werte der Impulsantwort, z.B.  $\mathbf{h}=[1 \ 1 \ 1]$ ;

sollen nur Einsen in der Impulsantwort enthalten sein, lässt sich auch  $\mathbf{h}=\text{ones}(1, N)$ ; verwenden;

`systemid(h)`;

## MATLAB-Funktionen

### `cos_dis`

Die Funktion `cos_dis` stellt die Zahlenfolge  $x = \cos(k)$  für  $k = 0 \dots 20$  graphisch dar.

### `erste_d`

Die Funktion `erste_d(k,x)` berechnet die erste Differenz des Eingabevektors  $x$  der Länge  $k$  und stellt die beiden Zahlenfolgen graphisch dar

Eingabedaten:

- $x$ : Vektor, der als Elemente die Werte der Zahlenfolge enthält, für die die erste Differenz gebildet werden soll.
- $k$ : Vektor, der als Elemente die Werte des Definitionsbereichs für Vektor  $x$  enthält.

### `figure`

Die Funktion `figure` öffnet ein neues Graphikfenster.

### `grenz`

Die Funktion `grenz(I, aus)` berechnet die Summe von  $I$  statistisch unabhängigen Zufallsvariablen, die alle gleichverteilt sind und den Erwartungswert  $E\{X_i\} = 0$  und die Varianz  $\sigma_2 = 1/12 \ \forall \ i = 1 \dots I$  besitzen.

Ausgegeben wird der Mittelwert und die geschätzte Varianz für  $N = 10^4$  Stichproben. Weiterhin stellt sie die Verteilungsdichtefunktionen graphisch dar.

Eingabedaten:

- $I$ : Anzahl der Zufallsvariablen

- aus:

– 'n':

$$Y = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_{i=1}^I X_i$$

– 'u':

$$Y = \sum_{i=1}^I X_i$$

### hist

Die Funktion `hist(x,bin)` stellt das Histogramm für die Elemente in Vektor `x` dar. Dabei wird der Wertebereich in `bin`-Intervalle unterteilt.

- `x`: Datenvektor
- `bin`: Anzahl der Teilintervalle

### imp\_per

Die Funktion `imp_per` stellt eine periodische Impuls- und Sprungfolge graphisch dar.

### noise

Die Funktion `noise( $\Omega_g$ )` berechnet die Autokovarianzfolge und das Leistungsdichtespektrum eines weißen Eingangs- und Ausgangsprozesses eines Tiefpasses der Grenzfrequenz  $\Omega_g$  für  $N = 10000$  Werte. Graphisch dargestellt werden die Autokovarianzfolgen und Spektren sowie der Frequenzgang des Systems. Weiterhin werden die Leistungen der Prozesse berechnet und ausgegeben.

Eingabedaten:

- $\Omega_g$ : Grenzfrequenz des TP-Filters

### rand, randn

Die Funktion `rand(N)` berechnet eine  $N \times N$ -Matrix deren Werte im Intervall  $[0,1[$  gleichverteilt und mittelwertfrei sind.

Die Funktion `randn(N)` berechnet eine  $N \times N$ -Matrix deren Werte normalverteilt sind.

- $N$ : Skalar

### roots

Die Funktion `roots(a)` berechnet die Wurzeln (Nullstellen) des Polynoms  $a_1s^n + \dots + a_ns + a_{n+1}$ .  
Eingabedaten:

- $a$ : Vektor  $a = [a_1, a_2, \dots, a_{n+1}]$

### si

Die Funktion `si( $f_g, f_a$ )` tastet die si-Impulsantwort eines idealen Tiefpasses der Grenzfrequenz  $f_g$  mit der Abtastfrequenz  $f_a$  ab und stellt die abgetastete Impulsantwort und die zugehörige zeitdiskrete Fourier-Transformierte dar.

Eingabedaten:

- $f_g$ : Grenzfrequenz des idealen Tiefpasses
- $f_a$ : Abtastfrequenz

### systemid

Die Funktion `systemid(b)` ermittelt die Impulsantwort eines Systems mit Hilfe eines (annähernd) weißen Eingangsprozesses durch Bilden der Kreuzkorrelationsfolge zwischen Eingangsprozess und Ausgangsprozess. Als Eingangsprozess dient hier eine Datenfolge von 26 Werten (GSM-Datenfolge). Graphisch ausgegeben werden die Eingangskorrelationsfolge und die Kreuzkorrelationsfolge.

Eingabedaten:

- $b$ : Vektor  $b$  dessen Elemente die Werte der Impulsantwort sind.

### Anmerkungen

- Alle Funktionen werden mittels der Hilfsfunktion `help` näher erläutert und können unter Verwendung des Befehls `type` eingesehen werden.
- Nach jedem Aufruf eines MATLAB-Befehls ist der Befehl `clear all` durchzuführen.

## Chapter 5

# Digitale Funkübertragung

Christopher Willuweit

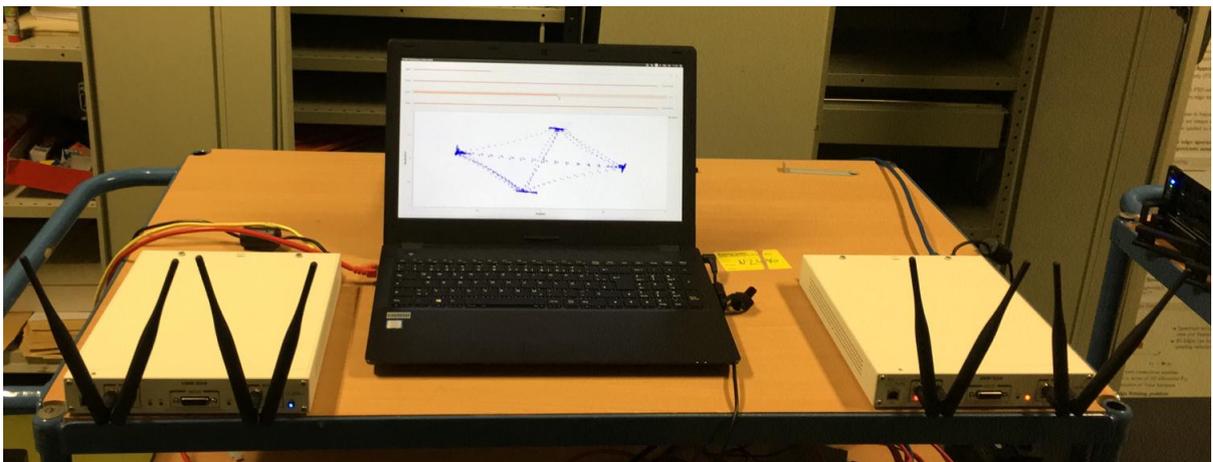
NW1, Raum N2410

Tel.: 0421/218-62395

E-Mail: willuweit@ant.uni-bremen.de

### 5.1 Einführung

Dieser Versuch soll einen Überblick einiger Grundlagen der digitalen Übertragung vermitteln. Dazu werden in verschiedenen Teilversuchen die einzelnen Aspekte einer digitalen Übertragungsstrecke untersucht. Als Simulationshilfsmittel soll die Software MATLAB<sup>®</sup>, sowie die zugehörige MATLAB/SIMULINK<sup>®</sup> Oberfläche verwendet werden. Die so erhaltenen Ergebnisse werden im Anschluss anhand von praktischen Messungen an einer realen Funkstrecke (Abbildung 5.1) verifiziert. In diesem Laborversuch wird für die Übertragung das ISM-Band bei etwa 2.4 GHz verwendet.



**Figure 5.1:** SDR-System bestehend aus zwei X310-USRPs und einem Laptop. Die Geräte sind per Gigabit-Ethernet verbunden.

Neben der Verifizierung des in der Vorlesung *Grundlagen der Nachrichtentechnik* vermittelten Systemmodells soll in diesem Versuch auch die Realisierung dieses Modells in Hardware erlernt werden. Dies geschieht während des Versuchstermins in Form einer Einführung durch den Betreuer.

Alle erforderlichen theoretischen Grundlagen dieses Versuchs werden in den Kapiteln 8, 9 und 11 des Lehrbuchs

"*Nachrichtenübertragung* von K.D. Kammeyer, 4., neu bearb. und erg. Auflage 2008, Teubner Wiesbaden, 2008, ISBN: 978-3-8351-0179-1"

detailliert beschrieben. Des Weiteren stehen die in der Vorlesung *Grundlagen der Nachrichtentechnik* gezeigten Folien zu Kapitel IV unter

<http://www.ant.uni-bremen.de/courses/gnt/>

zur Verfügung.

Ernst gemeinte Anregungen zur Verbesserung dieses Versuchs sowie Hinweise auf Rechtschreibfehler werden von uns gerne entgegengenommen.

### 5.1.1 Vor- und Nachbereitung des Versuchs

Für die erfolgreiche und zügige Durchführung dieses Versuchs ist es von Vorteil, die theoretischen Grundlagen zu beherrschen. Deshalb werden diese Kenntnisse vor Versuchsbeginn überprüft und die Vorbereitungsaufgaben besprochen. Bei einer unzureichenden Vorbereitung erfolgt keine Zulassung zur Durchführung des Versuches! Wenn die Möglichkeit besteht, sollte vor dem Versuch ein kurzer Blick auf SIMULINK<sup>®</sup> geworfen werden, welches eine blockorientierte graphische Oberfläche für MATLAB<sup>®</sup> darstellt. Sie kann mit Hilfe des Befehls `simulink` im MATLAB<sup>®</sup>-Eingabefenster gestartet werden<sup>1</sup>. Nach der Eingabe öffnet sich der *Simulink Library Browser*. Die für die Nachrichtentechnik wichtigsten Blockgruppen sind

- Simulink Blockset: enthält die Standard-Blöcke für SIMULINK<sup>®</sup>
- Communications Blockset: enthält die Basis-Blöcke zur Nachrichtenübertragung
- Signal Processing Blockset: enthält die Basis-Blöcke zur Signalverarbeitung.

Um sich mit den Möglichkeiten von SIMULINK<sup>®</sup> vertraut zu machen, lohnt es sich einige vorhandene Demonstrationen dieser Blockgruppen anzuschauen. Mittels der Befehlszeilen

- `demo toolbox communications`
- `demo toolbox signal`

wird die MATLAB<sup>®</sup>-Hilfe aufgerufen, die Links zu diesen Demonstrationen bereitstellt. In der für Sie bereitgestellten Studenten-Version von MATLAB<sup>®</sup> ist SIMULINK<sup>®</sup> leider nicht enthalten. Zur Lösung der Vorbereitungsaufgaben wird dieser Programmteil allerdings auch nicht benötigt.

Während des Versuches sind alle Aufgabenstellungen zu bearbeiten und ggf. in schriftlicher Form kurz zu beantworten. In regelmäßigen Abständen sind die bereits bearbeiteten Aufgaben mit dem Betreuer zu besprechen. Bei richtiger Beantwortung der Fragestellungen gelten die entsprechenden Aufgaben als erfolgreich bearbeitet.

---

<sup>1</sup>Allgemein ist es sehr sinnvoll die Hilfe unter matlab mit `help <command>` oder `doc <command>` zu nutzen.

### 5.1.2 Motivation

In der elektronischen Signal- und Informationsverarbeitung wird in zunehmendem Maße die digitale Übertragungstechnik verwendet. Die aktuelle Mobilfunk-"Kommunikation (LTE), WLAN-"Standards (IEEE 802.11), sowie Rundfunk- und Fernsehverfahren DAB und DVB-C/T/S stellen digitale Übertragungsverfahren dar. Im Gegensatz zur analogen Übertragung wird ein Signal nicht durch kontinuierlich verlaufende Werte beschrieben, sondern durch diskrete Signalwerte. Kommen bei einem Signal nur zwei Zustände vor, spricht man von einem Binärsignal. Ein binäres Zeichen wird hierbei als Bit bezeichnet, die englische Abkürzung für "binary digit". Ein Datenstrom lässt sich dann auch durch einen "Bitstrom" beschreiben:

$$b(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b(i) \delta(t - iT) \quad \text{mit } b(i) \in \{0, 1\} \quad \forall i \quad (5.1)$$

Da aus physikalischer Sicht jedoch keine digitalen Größen existieren, jeder Strom, jede Spannung usw. stellt eine zeitkontinuierliche Größe dar, müssen die Daten an die realen Über"-tragungs"-bedingungen angepasst werden. Der Bitstrom in (5.1) besitzt ein unendlich ausgedehntes Spektrum und dementsprechend keine bestimmte Bandbreite. Erst durch eine Gewichtung der einzelnen Bits mit zeitkontinuierlichen Impulsen  $g_S(t - iT)$ , wie in (5.2) bekommt der Bitstrom ein Spektrum und eine definierte Bandbreite.

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b(i) g_S(t - iT) \quad (5.2)$$

Dies bedeutet unter anderem, dass die analogen Modulationsverfahren nicht mehr verwendet werden. Stattdessen kommen digitale Modulationsformen zum Einsatz. In diesem Versuch werden zur digitalen Modulation der binären Daten in Bandpasslage zwei verschiedene lineare Modulationsformen betrachtet:

- PSK (Phase Shift Keying)
- QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Die zugehörigen äquivalenten Tiefpass"-Signale sind im Allgemeinen *komplex*, wobei der Real- und Imaginärteil der Trägerschwingung durch unabhängige Datenfolgen moduliert werden kann.

Eine kurze Betrachtung dieser und weiterer Grundlagen der digitalen Über"-tragung, sowie eine kurze Ein"-führung in das Funk"-über"-tragungs"-system erfolgt im nächsten Abschnitt. Die vor dem Versuch zu bearbeitenden Aufgaben sind in Abschnitt 5.2 zu finden, die Versuchs"-durchführung in Abschnitt 5.3 schliesst diesen Teil des Skriptes ab.

### 5.1.3 Theoretische Grundlagen

Innerhalb dieses Abschnitts werden einige der für das Labor relevanten Aspekte der digitalen Übertragung angedeutet. Vertiefende Informationen sind in den in Abschnitt 5.1 angegebenen Quellen zu finden.

Zur Betrachtung einer vereinfachten digitalen Übertragungsstrecke werden nun die einzelnen in Bild 5.2 zu sehenden Blöcke näher betrachtet.

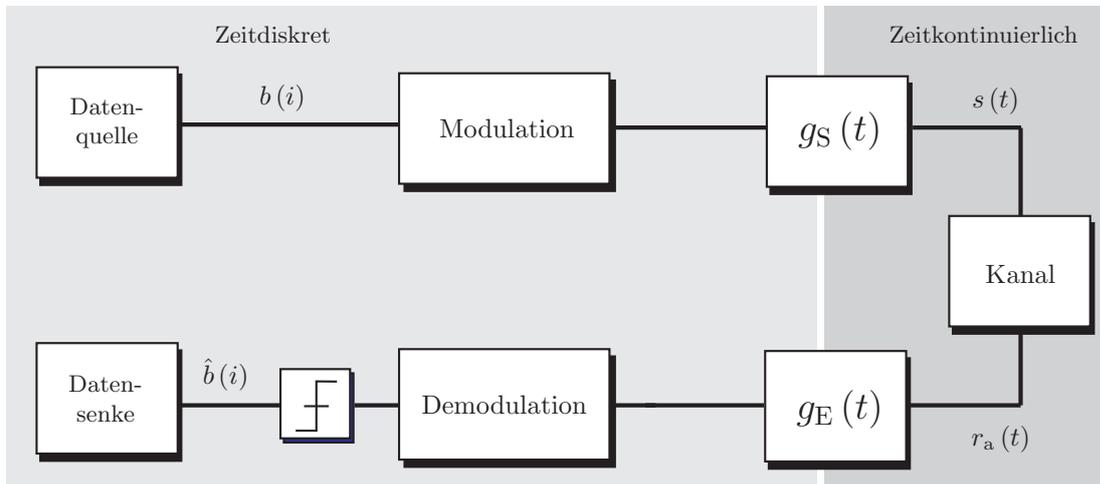


Figure 5.2: Vereinfachtes Modell eines digitalen Datenübertragungssystems

- Datenquelle und -senke:** Die Datenquelle beschreibt den Ursprung digitaler Signale. Dabei kann es sich um ein digitalisiertes Analogsignal oder um Ausgangsdaten aus einer digitalen Schnittstelle handeln. Diese Daten können dann in Form des Bitstroms  $b(i)$  beschrieben werden. Nach der Übertragung enden die Daten, die nach der Entscheidung erneut binär sind, in der Datensenke. Die Datensenke kann z.B. ein Digital-Analog-Wandler oder ein zusätzlicher digitaler Signalprozessor sein.
- Modulation/Demodulation:** Im Block "Modulation" erfolgt senderseitig eine Signalraumzuordnung der Eingangsdaten. Dort werden je nach Stufigkeit  $M$  der Modulationsart  $\log_2(M)$  Bits zu einem komplexen Wert zusammengefasst<sup>2</sup>. Im Block "Demodulation" wird diese Zuordnung wieder rückgängig gemacht. Die verwendete Modulationsform und deren Stufigkeit sind dem Empfänger dabei bekannt, um den Eingangsbitstrom möglichst originalgetreu wiedergewinnen zu können.
- Sende- und Empfangsfilter:** Das verwendete Sendefilter hat die Aufgabe eine Bandbegrenzung des Datensignals vorzunehmen, da die gepulsten Elemente am Ausgang des Modulators eine extrem hohe Bandbreite einnehmen würden. Die Impulsantwort des sogenannten *Impulsformers* wird mit  $g_S(t)$  bezeichnet, so dass  $s(t)$  die *Komplexe Einhüllende* des digitalen Modulationssignals darstellt. Das zugehörige Bandpasssignal lässt sich mit Hilfe des analytischen Signals bestimmen. Nach der (analogen) Übertragung erfolgt eine weitere Filterung mit  $g_E(t)$ . Dieses Empfangsfilter ist hauptsächlich für die Bandbegrenzung des auf dem Übertragungswege überlagerten Rauschens zuständig. Das optimale Empfangsfilter ist das sogenannte *Matched Filter*.
- Kanal:** Das Modell eines Kanals charakterisiert sich durch seine Impulsantwort  $h(t)$  und einen zusätzlichen additiven Rauschterm  $n(t)$ . Handelt es sich bei der Übertragung um einen, in der Praxis nicht

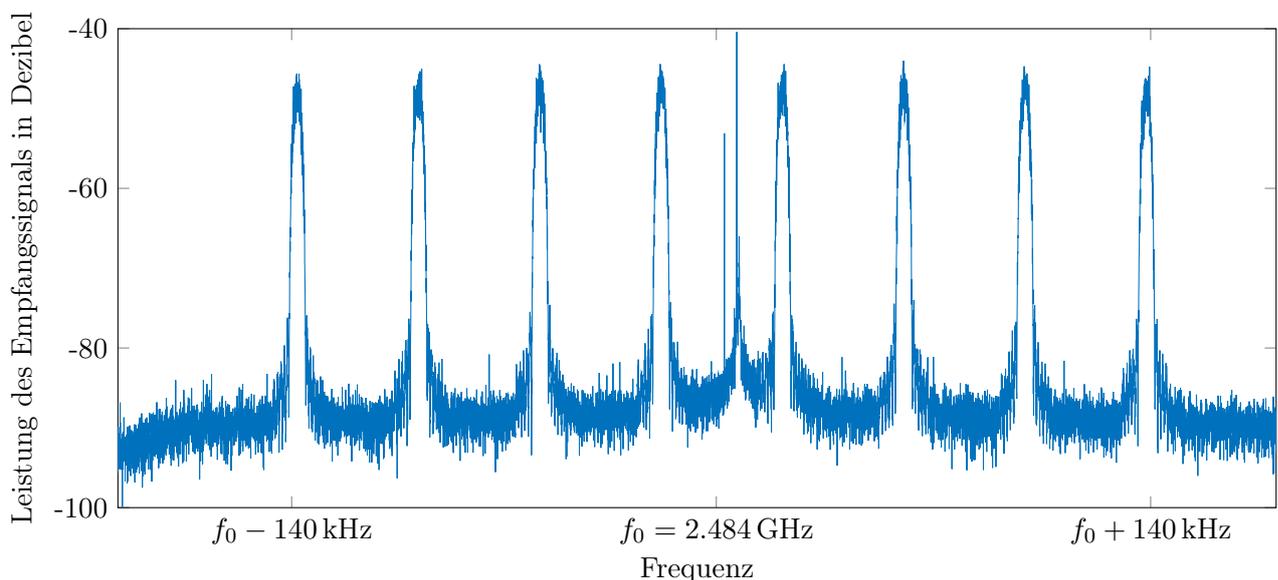
<sup>2</sup>in MATLAB:  $\log_2(M)$

existenten, idealen Kanal (Kanalimpulsantwort  $h(t) = \delta(t)$  und Rauschen  $n(t) = 0$ ), so können die gesendeten Daten ohne weitere Maßnahmen fehlerfrei übertragen werden. In der Praxis ist ein Kanal meist nicht so "gutmütig", in der Regel ist die Impulsantwort  $h(t) \neq \delta(t)$  und das Rauschen  $n(t) \neq 0$ . Ein einfacher Kanal, der für Simulation oft genutzt wird ist der sogenannte AWGN (Additive White Gaussian Noise)-Kanal, welcher nur durch additive Überlagerung von weißem Rauschen  $n(t)$  gekennzeichnet ist. Die Kanalimpulsantwort ist hier  $h(t) = \delta(t)$ . Bei zu starken Rausch-Störungen können einige Daten nicht mehr fehlerfrei erkannt werden. In Abhängigkeit der Modulationsart und des Signal-Rausch-Abstandes stellt sich dann eine bestimmte charakteristische Bitfehlerrate ein. Bei Mobilfunkkanälen treten noch weitere Störungen auf, bedingt durch die Kanalimpulsantwort  $h(t)$ , die dann durch entsprechende Gegenmaßnahmen verringert werden müssen. Letzteres wird am Ende dieses Versuchs aufgegriffen.

- **Datenentscheidung:** Erfüllen Sende- und Empfangsfilter die erste Nyquistbedingung, so ist eine Interferenzfreie Rekonstruktion der Daten möglich. Die Entscheidung der Daten erfolgt anhand von Entscheidungsgrenzen im Signalraum. Das Empfangssymbol wird dem am wahrscheinlichsten gesendeten Symbol zugeordnet.

### 5.1.4 Die Hardware

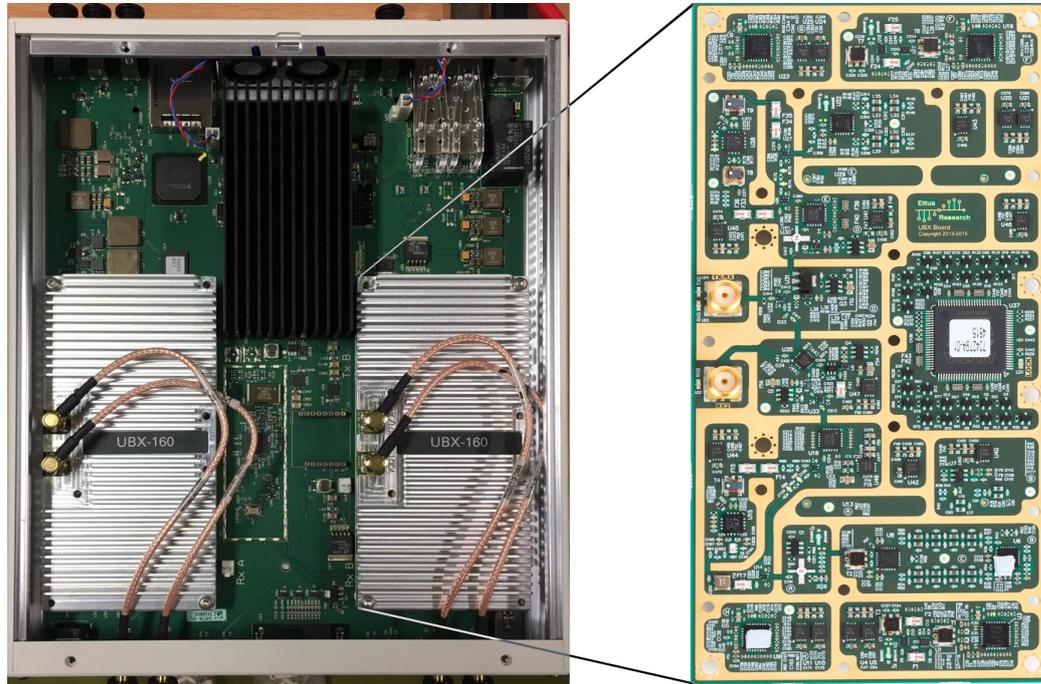
Am Arbeitsbereich Nachrichtentechnik (ANT) stehen zwei *Universal Software Radio Peripheral* (USRP) Systeme der Firma *ettus research* zur Verfügung. In diesem werden sie in Kombination mit einem Computer verwendet, um ein sogenanntes *Software Defined Radio* (SDR) zu realisieren. Die USRPs dienen dabei lediglich als Abspiel- bzw. Aufnahmegerät für IQ-Samples. Auf dem Laptop wurde in Software (GNURadio<sup>3</sup>) ein Mehrnutzersystem implementiert, welches jeder Laborgruppe ein dediziertes Frequenzband mit einer Bandbreite von 20kHz zuordnet (Abbildung 5.3). Diese Aufteilung des Frequenzspektrums für verschiedene Nutzer wird als *Frequency Division Multiple Access* (FDMA) bezeichnet.



**Figure 5.3:** Leistungsdichtespektrum bei gleichzeitiger Aussendung aller acht Laborgruppen.

<sup>3</sup>[www.gnuradio.org/](http://www.gnuradio.org/)

In Abbildung 5.4 ist ein einzelner USRP mit abgenommener Abdeckung gezeigt. Er beinhaltet einen FPGA für die Kommunikation per Ethernet (UDP/IP), mehrfach AD/DA-Wandler und zwei Frontend-Modulen, welche die Umwandlung zwischen Basisband und Bandpassbereich vornehmen. An diesen Modulen finden sich auch SMA-Schraubverbinder für die Sende- und Empfangsantennen.



**Figure 5.4:** Links: Ein X310-USRP mit entfernter Abdeckung. Unter dem schwarzen Kühlkörper befindet sich unter anderem ein FPGA sowie ein vierfacher DA- und AD-Wandler zur Erzeugung, bzw. Abtastung von jeweils zwei I/Q-Signalköpfen. Rechts\*: Eines der zwei Frontend-Boards mit entfernter Abschirmung. Hier findet der Übergang zwischen Basisband und Bandpassbereich statt.

\* Quelle: Scott Torborg, [www.scotttorborg.com/](http://www.scotttorborg.com/)

Vergleicht man die Menge von elektronischen Komponenten allein auf dem Frontend-Board mit dem in Abbildung 5.2 gezeigten Modell, wird schnell klar, dass das Modell eine extreme Vereinfachung realer Hardware ist. Dennoch bildet es die Grundlage zum Verständnis digitaler Kommunikation.

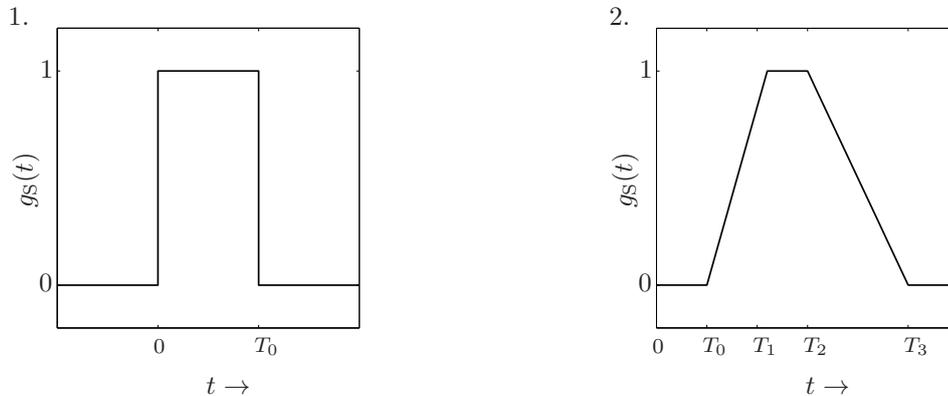
## 5.2 Vorbereitungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in schriftlicher Form zu bearbeiten. Die graphischen Lösungen und erzeugter Quellcode der mit MATLAB<sup>®</sup> zu bearbeitenden Aufgaben sind **ausgedruckt** zum Labortermin mitzubringen. Die MATLAB<sup>®</sup>-Funktionshilfe kann durch `help Funktionsname` aufgerufen werden. Achten Sie dabei darauf, dass die .m-Dateien im Arbeitsverzeichnis liegen. Die benötigten Dateien sind unter <http://www.ant.uni-bremen.de/courses/glab/> zu finden. Bei Fragen wenden Sie sich bitte an den zuständigen Betreuer!

### Aufgabe 1: Matched-Filter

- Geben Sie die verallgemeinerte Matched-Filter Bedingung eines Empfangsfilters  $g_E(t)$  für die äquivalente komplexe Basisbanddarstellung digitaler Modulationssysteme an.

- b) Wie berechnet sich die Gesamtimpulsantwort  $g(t)$  aus Sende- und Empfangsfilter?  
(*Formel oder kurzer Satz!*)
- c) Skizzieren Sie die entsprechenden Empfangsfilter für folgende zwei Sendefilter, so dass das maximale S/N am Empfängeranfang erzielt wird (*Matched-Filter!*).



**Figure 5.5:** Sendefilter  $g_S(t)$

### Aufgabe 2: Kosinus-Roll-off-Impulsformung

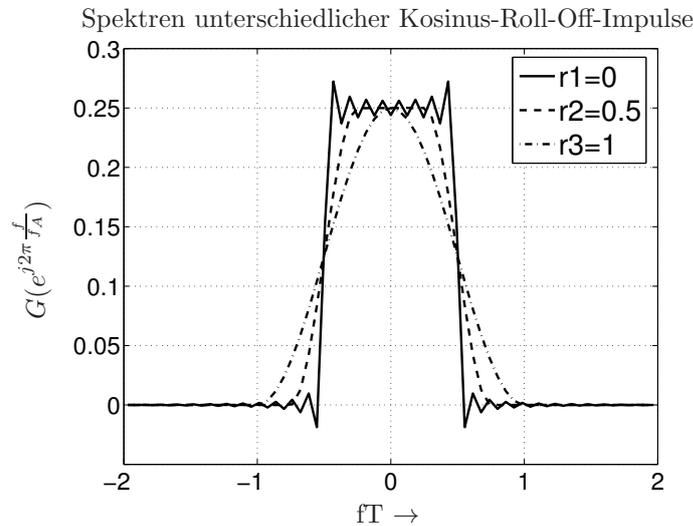
In der praktischen Übertragungstechnik werden zur Impulsformung häufig die bekannten Kosinus-Roll-Off-Filter eingesetzt. Im Sinne der eben behandelten Matched-Filterung besitzen dann das Sende- und Empfangsfilter jeweils Wurzel-"-Kosinus-"-Roll-Off-"-Charakteristiken.

- a) Erzeugen Sie mittels der `wurzc`-Funktion einen Wurzel-Kosinus-Roll-Off-Impuls mit einem Roll-Off-Faktor von  $r=0.5$ . Die Anzahl von Abtastwerten pro Symbolintervall soll  $w=4$  und die Länge in Symbolintervallen soll  $L=16$  gewählt werden. Ist die erste Nyquist-Bedingung für diesen Impuls erfüllt (`stem`-Funktion)?
- b) Falten Sie den erzeugten Wurzel-Kosinus-Roll-Off-Impuls mit sich selbst (`faltung.m`). Mit Hilfe der `cosrolloff`-Funktion lässt sich ein Kosinus-Roll-Off-Impuls generieren. Verwenden Sie die oben angegebenen Parameter! Stellen Sie beide in dieser Teilaufgabe erzeugten Impulse in einem Plot dar (`plot`-Funktion). Was stellen Sie fest? Ist die erste Nyquistbedingung erfüllt? Wie verhält es sich mit der zweiten Nyquist-Bedingung?
- c) Generieren Sie nun einen Kosinus-Roll-Off-Impuls mit einem Roll-Off-Faktor von  $r=1$ . Überprüfen Sie erneut die Nyquistbedingungen.
- d) Generieren Sie Kosinus-Roll-Off-Impulse mit unterschiedlichen Roll-Off-Faktoren von  $r_1=0$ ,  $r_2=0.5$  und  $r_3=1$ . Verwenden Sie die Funktion `f_trafo` um eine nicht-kausale Spek"-tral"-darstellung der Impulse zu erhalten. Wie verhält sich die Bandbreite der Spektren in Abhängigkeit des Roll-Off-Faktors? Bezüglich welcher Frequenz besitzen alle Spektren eine Nyquistflanke und wie wird diese Frequenz genannt?

*Hinweis:*

- Zur Selbstkontrolle ist das Ergebnis der letzten Teilaufgabe abgebildet. Mit dem Befehl `hold on` können mehrere Impulse in einem Bild dargestellt werden.

- Bei einem Roll-Off-Faktor von  $r_1=0$  entsteht im Zeitbereich eine Si-Funktion. Durch die Bandbegrenzung dieser Funktion entstehen bei der Transformation in den Frequenzbereich Oszillationen, die als Gibbs'sches Phänomen bekannt sind. Dies wird u.a. in der Vorlesung *Digitale Signalverarbeitung* weiterführend behandelt.



### Aufgabe 3: Bitfehlerkurven

- Wie sehen die Elemente  $d_a \in \{d_{a,0}, d_{a,1}\}$  und  $d_u \in \{d_{u,0}, d_{u,1}\}$  für ein antipodales und wie für ein unipolares Datensignal aus?
- Plotten Sie mit Hilfe von MATLAB<sup>®</sup> die theoretischen Bitfehlerkurven für eine zweistufige AWGN-Übertragung *antipodaler* und *unipolarer* Daten in Abhängigkeit von  $E_S/N_0$  in dB.

*Hinweise:*

- Zur Verwendung der  $E_S/N_0$ -Werte in der Gauß'schen Fehlerfunktion muss der erzeugte Vektor in die lineare Darstellung umgerechnet werden.
- Das Komplement zur Gauß'schen Fehlerfunktion lässt sich in MATLAB<sup>®</sup> mit der Funktion `erfc` darstellen.
- Halblogarithmische Darstellungen lassen sich in MATLAB<sup>®</sup> durch die Funktionen `semilogx` und `semilogy` erzeugen.
- Zur Selbstkontrolle ist die Lösung in Abbildung 5.6 abgebildet.

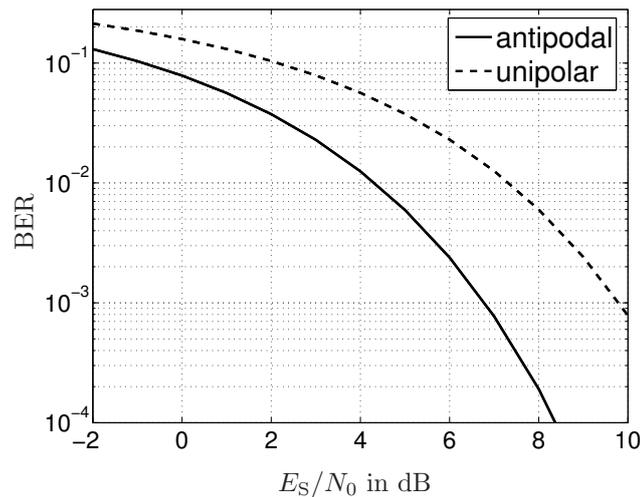


Figure 5.6: Bitfehlerkurven für unipolare und antipodale AWGN-Übertragung

**Zusatzaufgabe (freiwillig):**

- c) Überprüfen Sie die theoretischen Bitfehlerkurven durch eine Simulation unter MATLAB<sup>®</sup>. Als Hilfe steht Ihnen die Funktion `awgn_sim` zur Verfügung. Mittels `help awgn_sim` erhalten Sie Hilfe über den Funktionsaufruf. Als Sende- und Empfangsfilter verwenden Sie jeweils einen Wurzel-Kosinus-Roll-Off-Impuls mit den Parametern `r=1`, `w=4`, und `L=16`.

- Um die Bitfehlerkurve aufzunehmen, empfiehlt sich eine `for`-Schleife über jeden  $E_S/N_0$ -Wert. Verwenden Sie dann eine Länge der Datenvektoren von  $N \geq 1e5$ . Die Simulation dauert dadurch länger, wird aber genauer. Zufällige Datenvektoren lassen sich mit

```
antipodal: da = sign(randn(1,N))
unipolar:  du = 0.5*(sign(randn(1,N))+1)
```

erzeugen. Die Funktion `awgn_sim` liefert (ohne Berücksichtigung der Ein- und Ausschwingvorgänge mit Parameter `A=1`) das Filterausgangssignal im Symboltakt `y`, sowie den Eingangsdatenstrom abzüglich der Ein- und Ausschwingvorgänge `d_ref`. Die Bitfehlerrate kann dann gewonnen werden durch:

```
antipodal: Pba=sum(abs(sign(real(y))-d_ref)/2)/N
unipolar:  Pbu=sum(abs(0.5*sign(real(y))-0.5)+0.5-d_ref)/N
```

**Aufgabe 4: Digitale Modulation**

- a) Erzeugen Sie sich in MATLAB<sup>®</sup> zwei unabhängige, reelle Datenfolgen  $d'(i) \in \{-1, 1\}$  und  $d''(i) \in \{-1, 1\}$  der Länge  $N=1000$  und bilden Sie die komplexe Datenfolge  $d(i) = d'(i) + j \cdot d''(i)$ . Plotten Sie die komplexe Folge mit Hilfe des Befehls `plot(d, 'o')`. Welche digitale Modulationsform erkennen Sie? Welcher Faktor  $a$  wird zur Normierung der Signalraum-Konstellation auf Leistung Eins ( $\sigma_d^2 = E \{ \|d(i)\|^2 \} \stackrel{!}{=} 1$ ) benötigt?
- b) Wieviele Bits werden zur Darstellung eines Symbols in dieser Modulationsform benötigt? Geben Sie für eine Modulationsform mit  $M$  komplexen Datensymbolen eine Formel zur Berechnung der dafür benötigten Bitanzahl  $m$  an.

## 5.3 Versuchsdurchführung

In diesem Laborversuch wird Ihnen ein Einblick in die digitale Übertragungstechnik gegeben. Als Hilfsmittel steht zunächst die Oberfläche SIMULINK<sup>®</sup> zur Verfügung. Mit diesem praktischen Simulationswerkzeug soll in Abschnitt 5.3.1 eine Übertragungsstrecke erstellt werden, mit der dann einige grundlegende Eigenschaften der digitalen Übertragung analysiert werden. Die mit Hilfe der Simulation erlangten Kenntnisse sollen im Anschluss daran in Abschnitt 5.3.2 durch einige praktische Messungen mit Hilfe der Hardwareemonstratoren verifiziert werden. Zum Abschluss wird in Abschnitt 5.3.3 die in SIMULINK<sup>®</sup> betrachtete AWGN-Übertragung durch eine Übertragung im ISM-Band unter realen Kanalbedingungen ersetzt.

### 5.3.1 Übertragungsstrecke unter SIMULINK<sup>®</sup>

Für diesen Teilversuch liegt Ihnen eine vorgefertigte Block-"-Bibliothek unter SIMULINK<sup>®</sup> vor. Die Datei `dig_uebertragung_library.mdl` enthält alle notwendigen Blöcke, die Sie zur Bearbeitung der einzelnen Aufgaben benötigen. Hier zuvor noch einige weitere Tips zu SIMULINK<sup>®</sup>:

- Eines neues Modell lässt sich über *File* → *New* → *Model* erstellen.
- Das Einfügen einzelner Blöcke ins Modell erfolgt über einfaches Drag&Drop von der Bibliothek zum Modell.
- Ein- und Ausgänge der Blöcke lassen sich durch Ziehen der Maus bei gedrückter linker Maustaste oder durch Drücken der Taste "STRG" und gleichzeitiges Klicken auf die entsprechenden Blöcke verbinden.
- Text lässt sich durch einen einfachen Doppelklick an der gewünschten Stelle einfügen.
- Die Eingänge der Blöcke lassen sich durch einen Rechtsklick auf den entsprechenden Block und *Rotate & Flip* → *Flip Block* umkehren. *Format* → *Clockwise*, *Counterclockwise* dreht den gesamten Block um 90 Grad im Uhrzeigersinn oder entgegen.
- Das erstellte System lässt sich mit Hilfe des ▶ -Buttons ausführen! Sollte dieses Element bei Ihnen fehlen, so können Sie das erstellte System auch mit "STRG+T" starten bzw. ausführen.
- Mit Hilfe des Blocks "Ausgabe in Workspace" lassen sich Vektoren aus dem Modell als Variable in MATLAB<sup>®</sup> darstellen. Dort kann der entsprechende Vektor durch die Eingabe des Blocknamens, z.B. `werte`, im MATLAB<sup>®</sup>-Eingabefenster betrachtet werden.
- Sollte das System zu langsam werden, beenden Sie die Simulation, schliessen Sie nicht benötigte Fenster und entfernen Sie die nicht mehr relevanten Blöcke aus dem Modell.
- Alle möglichen verstellbaren Variablen in der zu erstellenden Übertragungsstrecke können nach dem **Kopieren des blauen Parameterblocks in ein neues Modell mittels Doppelklick auf diesen blauen Block** verändert werden. Alle Parameter in den anderen Blöcken müssen unverändert bleiben!!!

Bearbeiten Sie nun folgende Punkte:

- a) Erstellen Sie in SIMULINK<sup>®</sup> mit Hilfe oben genannter Bibliothek eine digitale Übertragungsstrecke. Verwenden Sie dazu zunächst eine antipodale BPSK-Modulation (M-PSK Blöcke) und Wurzel-Cosinus Filter. Lassen Sie sich die Bitfehlerrate des Systems anzeigen. Speichern Sie vorher Ihr Modell unter dem Namen `exercise631.mdl` ab! Stellen Sie ein  $E_b/N_0$  von 8 dB ein und vergleichen Sie den ermittelten Wert mit dem theoretischen Fehlerwert aus Vorbereitungsaufgabe 3. Alle anderen Parameter bleiben zunächst unverändert. Bedenken Sie beim Vergleich, dass  $\frac{E_s}{N_0} = \log_2(M) \cdot \frac{E_b}{N_0}$  gilt. Was stellen Sie fest?
- b) Erhöhen Sie die Stufigkeit der Modulation, so dass eine komplexe QPSK-Übertragung erfolgt. Schauen Sie sich das diskrete Signalraum-Diagramm am Ausgang des Modulators an. Welche diskreten Phasenwerte  $\phi$  können die Datensymbole einnehmen? Geben Sie hierzu eine Formel an! Wie sieht der diskrete Signalraum am Ausgang des Empfangsfilters aus?
- c) Stellen Sie unterschiedliche  $E_b/N_0$  ein. Was lässt sich über die empfangenen, komplexen Symbole sagen? Wie verhält sich die Bitfehlerrate? Vergleichen Sie zusätzlich die Varianz der gesendeten ( $\sigma_d^2$ ) und der empfangenen ( $\sigma_a^2$ ) Symbole bei einem  $E_b/N_0$  von 30 dB. Was lässt sich feststellen? Was passiert bei einem  $E_b/N_0$  von -20 dB?
- d) Ersetzen Sie die zur PSK-Modulation verwendeten Blöcke durch eine QAM-Modulation mit  $M = 4$ . Welche diskreten Phasenwerte  $\phi$  können die Datensymbole bei möglichst rauschfreiem Kanal nun einnehmen? Verwenden Sie nun den Block B1, um das Augendiagramm am Ausgang des Empfangsfilters zu betrachten. Überprüfen Sie die Nyquistbedingungen anhand des gezeigten Diagramms.
- e) Ändern Sie die Roll-Off-Faktoren des Sende- und des Empfangsfilters auf  $r = 0,5$ . Überprüfen Sie erneut die Nyquistbedingungen. Wie verhält sich die Augenöffnung bei niedrigerem Roll-Off-Faktor?
- f) Lassen Sie sich zusätzlich die kontinuierlichen Signalraumdiagramme der Filterausgänge anzeigen (Block B2 für die Empfangsseite!). Wo kann man die diskreten Signalraumpunkte im kontinuierlichen Fall erkennen? Was muss erfüllt sein? Verändern Sie dazu die Filtertypen, die Modulationsform, sowie die Roll-Off-Faktoren nach Belieben. *Hinweis:* Mit der "Autoscale"-Funktion können die "Meßgeräte" einfach skaliert werden.
- g) Verwenden Sie erneut einen Wurzel-Kosinusfilter am Sender bei einem  $E_b/N_0$  von 8 dB. Vergleichen Sie die Bitfehlerrate und den diskreten Empfangssignalraum bei Verwendung eines Wurzel-Kosinus- und eines Kosinus-Empfangsfilters. Was fällt auf? Wie lässt sich die Änderung erklären?
- h) Machen Sie die eben vorgenommenen Filtereinstellungen rückgängig (jeweils Wurzel - Kosinus - Filter mit  $r = 0.5!$  und  $M = 4$ ) und stellen Sie ein  $E_b/N_0$  von 30 dB ein. Ändern Sie den durch den Kanal verursachten Phasenversatz in  $+5^\circ$  Schritten. Ab wann stellt sich eine Fehlerrate größer Null ein und ermitteln Sie die ungefähr entstehende Fehlerrate. Wie lässt sich diese Fehlerrate erklären?
- i) Stellen Sie einen "künstlichen" Frequenzversatz von 100 Hz ein und betrachten Sie den diskreten Signalraum am Empfänger. Was ist zu erkennen?

### 5.3.2 Messungen mit der realen Übertragungsstrecke

In diesem Teil wird der zuständige Betreuer die Übertragungsstrecke in Betrieb nehmen. Zunächst wird die Struktur der verwendeten Hardware und ihr Zusammenhang mit dem vereinfachten Systemmodell erläutert. Danach wird eine kontinuierliche digitale Übertragung gestartet und einige Effekte (insbesondere die des Kanals, Dämpfung, Relektion, Fading) gezeigt. Dieser Versuchsteil sollte möglichst interaktiv sein. Offene Fragen zu realer Hardware sowie Systemmodellen sollten also hier gestellt werden.

### 5.3.3 Übertragung mit der realen Übertragungsstrecke

Zur Übertragung stehen Ihnen zwei SIMULINK<sup>®</sup>-Modelle zur Verfügung - den Sender finden Sie unter `transmitter.mdl` und den Empfänger unter `receiver.mdl`. Die Daten werden hier vor dem Senden zwischengespeichert und die empfangenen Daten nach dem Übertragen ebenfalls in einer Datei gespeichert. Zur besseren Visualisierung findet sich im Versuchsaufbau ein sogenannter Spektrumanalysator mit eigener Antenne, mit dem überprüft werden kann, wann die Aussendung tatsächlich stattfindet. Dies kann einige Sekunden dauern. Nach dem Übertragen werden die empfangenen Basisbanddaten für die jeweilige Laborgruppe automatisch gespeichert und das Empfangsmodell kann gestartet werden.

- a) Senden Sie willkürliche Daten mit Hilfe des Sendermodells. Sie können dafür die Modulationsform und den Roll-Off-Faktor des Sendefilters verstellen.
- b) Empfangen Sie die Daten mit Hilfe des Empfängermodells. Achten Sie darauf, welche Einstellungen Sie am Empfänger vornehmen. Sind optimale Voraussetzungen geschaffen?
- c) Untersuchen Sie die in den vorangegangenen Versuchsteilen gemachten Beobachtungen anhand der realen Übertragung. Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten stellen Sie fest?
- d) Was können Sie bei einer 16-QAM Übertragung über die Varianz der Empfangssymbole, sowie die Bitfehlerrate sagen? Stellen Sie dazu den Roll-Off-Faktor der Filter auf  $r = 1$ .
- e) Schauen Sie sich den Block *Synchronisation* genauer an, indem Sie diesen mit einem "Doppelklick" öffnen. Warum sind die einzelnen Synchronisationsschritte notwendig? Betrachten Sie die vorbereiteten Ausgaben nach jedem Synchronisationsschritt.

## Chapter 6

# Codierung

**Matthias Hummert**

NW1, Raum N2390, Tel.: 0421/218-62419

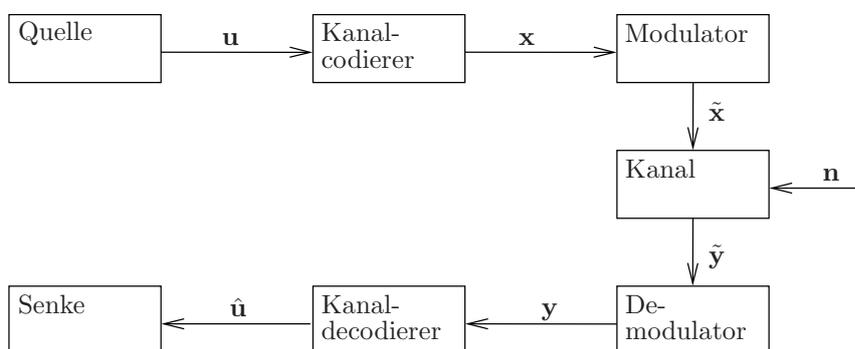
E-Mail: [hummert@ant.uni-bremen.de](mailto:hummert@ant.uni-bremen.de)

### 6.1 Einführung

In diesem Versuch sollen Beispiele für die in der Vorlesung “Grundlagen der Nachrichtentechnik” vorgestellten Verfahren der Quellen- und Kanalcodierung untersucht werden. Dazu soll eine einfache Übertragungsstrecke aufgebaut und die einzelnen Teile analysiert werden.

Für die Durchführung dieses Versuchs wird die Kenntnis des behandelten Stoffes der Vorlesung “Grundlagen der Nachrichtentechnik” vorausgesetzt. Die Folien können unter <http://www.ant.uni-bremen.de/courses/gnt/> heruntergeladen werden. Einzelne für diesen Versuch wichtige Themen werden im Folgenden noch einmal kurz erläutert.

#### 6.1.1 Theoretische Grundlagen



**Figure 6.1:** Übertragungsstrecke bestehend aus äquivalentem Basisbandmodell

In diesem Versuch soll exemplarisch eine einfache Übertragungsstrecke erstellt und simuliert werden. Hier wird als Model angenommen, dass die Übertragungsstrecke aus einzelnen Blöcken besteht, die jeweils das

eingehende Signal verändern und das resultierende Signal an den nächsten Block weiter geben (siehe Bild 6.1). In diesem Model ist der Kanal durch die physikalischen Randbedingungen gegeben. Sein genaues Verhalten ist nicht bekannt und kann nur stochastisch modelliert werden. Bei den restlichen Blöcken ist das jeweilige deterministisches Verhalten vorher bekannt. Die wichtigen Grundlagen der einzelnen Blöcke der Übertragungstrecke werden nachfolgend kurz erläutert.

## Quellencodierung

In der Nachrichtentechnik wird mit “Quelle” der Ausgangspunkt einer Übertragung und mit “Senke” der Endpunkt dieser Übertragung bezeichnet. Im Allgemeinen liegen die zu übertragenden Informationen als physikalische Signale (Sprache, Sensorwerte, etc) vor. Diese müssen vor der Übertragung erst in eine in Amplitude und Zeit diskrete Darstellung überführt werden (“Quantisierung” und “Abtastung”). Diesen quantisierten Werten wird dann jeweils eine binäre Datensequenz zugewiesen. Diesen Vorgang bezeichnet man auch als “Mapping”. Um die Ressourcen der Übertragungstrecke möglichst effizient zu nutzen “mappt” die Quellencodierung die gegebenen Informationen der Quelle auf möglichst wenigen Bits.

Ein Beispiel für eine Quellencodierung ist die “Huffman Codierung”. Ziel der Huffman Codierung ist es den oft auftretenden Signalwerten kurze Informationsworte und den selten auftretenden Signalwerten lange Informationsworte zuzuweisen, und somit im Mittel möglichst wenig Bits übertragen zu müssen. Hierfür werden die quantisierten Signalwerte entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit sortiert und schrittweise die beiden mit der geringsten Wahrscheinlichkeit zu einem neuen Symbol zusammengefasst. Dieses neue Symbol erhält dann als Wahrscheinlichkeit die Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten. Sobald alle Signalwerte zusammengefasst wurden, kann man das Mapping der einzelnen Signalwerte aus der Zuordnung zu den zusammengefassten Symbolen ablesen.

Für die anderen Blöcke der Übertragungstrecke wird im Nachfolgenden davon ausgegangen, dass die Quellencodierung die Daten in Form von Informationswörtern  $\mathbf{u}$  mit konstanter Länge  $k$  ausgibt.

## Kanalcodierung

Das Ziel der Kanalcodierung ist es, die Informationswörter  $\mathbf{u}$  der Quelle gegen Fehler auf dem Kanal zu schützen. Dies wird durch Hinzufügen weiterer Symbole, welche Redundanz beinhalten, erreicht. Das verwendete Verfahren zur Kanalcodierung (auch “Code” genannt) legt fest, wie aus dem Informationswort  $\mathbf{u}$  das Codewort  $\mathbf{x}$  erzeugt wird. Bei einem sogenannten “systematischen Code” sind alle Symbole des Informationsworts  $\mathbf{u}$  direkt im Codewort  $\mathbf{x}$  enthalten, es wird hier nur Redundanz hinzugefügt und eventuell die Reihenfolge der Symbole geändert.

Eine einfache Form der Kanalcodierung ist der Lineare Blockcode. Ein Linearer Blockcode wird durch die Zuordnung der Informationsworte  $\mathbf{u}$  der Länge  $k$  zu den Codewörtern  $\mathbf{x}$  der Länge  $n$  definiert. Diese Zuordnung lässt sich mit der einer sogenannte “Generator Matrix”  $\mathbf{G} \in \{0, 1\}^{k \times n}$  beschreiben, welche aus  $k$  verschiedenen gültigen Codewörtern  $\mathbf{x}$  besteht. Mit dieser Generator Matrix  $\mathbf{G}$  kann die Codierung eines Informationsworts  $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{k-1}]$ , mit  $u_i \in \{0, 1\}$ , als Multiplikation dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}_{\text{mod}2}. \quad (6.1)$$

Somit sind bei diesem Code alle gültigen Codeworte  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ , mit  $x_i \in \{0, 1\}$ , entweder Zeilen der Generator Matrix  $\mathbf{G}$  oder ergeben sich aus der binären Addition von Zeilen der Generator Matrix  $\mathbf{G}$ .

## Modulation

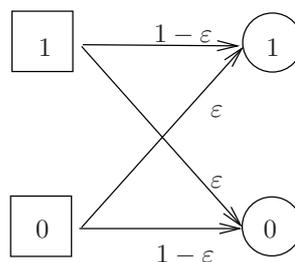
Während der Übertragung über einen Kanal tritt im Allgemeinen Rauschen auf, welches die gesendeten Werte verändert. Um die Detektion der gesendeten Werte am Empfänger zu verbessern, werden die binären Werte vor dem Senden moduliert.

Die einfachste Form der Modulation ist das sogenannte “Binary Phase-Shift Keying” (BPSK). Hierbei wird jedes binäre Symbol (oder Bit) auf das entsprechende Symbol im Signalraum abgebildet. Diese Symbole unterscheiden sich in ihrer Phase, aber nicht in ihrer Amplitude. Hierbei werden meist die Symbole “1” und “-1” verwendet. Am Empfänger müssen die verrauschten Empfangswerte  $\tilde{y}$  wieder in Bits umgewandelt oder demoduliert werden. Dies wird mit einer sogenannten “hard-decision” gemacht. Hierbei wird überprüft, ob der Empfangswert  $\tilde{y}_i$  über- oder unterhalb einer Entscheidungsschwelle liegt. Die ideale Entscheidungsschwelle im Sinne geringster Fehlerwahrscheinlichkeit hängt von der Auftretswahrscheinlichkeit der einzelnen Werte ab. Im Falle einer BPSK und falls die Quelle gleichwahrscheinliche binäre Werte liefert, dann liegt die ideale Entscheidungsschwelle bei 0.

Ein Beispiel für ein höherstufiges Modulationsverfahren ist das “Quadrature Phase-Shift Keying” (QPSK). Höherstufige Modulationsverfahren zeichnen sich dadurch aus, dass sie mehrere Bits eines Codeworts  $\mathbf{x}$  auf ein Symbol im Signalraum abbilden. Im Fall der QPSK werden 2 Bits auf eines von 4 Symbolen im Signalraum abgebildet. Die verwendeten Symbole bei der QPSK unterscheiden sich wie bei der BPSK nur in ihrer Phase, aber nicht in ihrer Amplitude, daher muss hier die komplexe Raumrichtung genutzt werden. Die QPSK kann wie zwei überlagerte BPSK betrachtet werden, eine in reelle und eine in imaginäre Raumrichtung. Die Demodulation wird daher ähnlich wie bei der BPSK durchgeführt, wobei hier Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet werden und somit eine hard-decision für jedes übertragene Bit getrennt durchgeführt wird.

## Kanal

Als Modell für den Kanal wird oft der “Additive White Gaussian Noise” (AWGN) Kanal verwendet. Bei diesem Kanal wird zu den gesendeten Werten  $\tilde{\mathbf{x}}$  der Rauschterm  $\mathbf{n}$  addiert. Der Rauschterm  $\mathbf{n}$  ist beim AWGN-Kanal mittelwertfrei und Gauss verteilt. Die Varianz des Rauschterms  $\mathbf{n}$  bestimmt, wie stark der Einfluss des Rauschens auf das empfangene Signal ist.



**Figure 6.2:** Binary Symmetric Channel

Aus Sicht des Kanaldecoders, können die Blöcke Modulator, Kanal und Demodulator zusammengefasst und zusammen als binärer Kanal betrachtet werden. Hierfür wird das Modell des “Binary Symmetric Channel” (BSC) verwendet (siehe Bild 6.2). Bei einem BSC wird jedes übertragene Bit einzeln mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von  $\varepsilon$  gestört und damit invertiert empfangen. Somit wird jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \varepsilon$  korrekt empfangen.

## Kanaldecodierung und Fehlerkorrektur

Bei der Übertragung über einen BSC wird das übertragene Codewort  $\mathbf{x}$  am Empfänger als Empfangswort  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$  empfangen, wobei  $\mathbf{e}$  hier ein binärer Fehlervektor ist. Der Fehlervektor wird durch das Rauschen auf dem Kanal bestimmt und daher ist der Wert eines konkreten Fehlervektors im Allgemeinen nicht bekannt. Mit der sogenannten "Parity-Check Matrix"  $\mathbf{H} \in \{0, 1\}^{(n-k) \times n}$  kann überprüft werden, ob ein ungestörtes Codewort vorliegt. Die Parity-Check Matrix  $\mathbf{H}$  ist definiert durch:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

Somit erfüllen alle gültigen Codeworte  $\mathbf{x}$ , die mit der Generator Matrix  $\mathbf{G}$  erzeugt wurden, folgende Gleichung:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

Falls für ein empfangenes Wort  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$  gilt, so handelt es sich bei  $\mathbf{y}$  um ein gültiges Codewort. Dieses Codewort  $\mathbf{y}$  muss nicht zwingend das gesendete Codewort  $\mathbf{x}$  sein, da der Fehlervektor  $\mathbf{e}$  selber ein gültiges Codewort sein kann und somit Empfangsvektor  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$  ein anderes gültiges Codewort ist. Falls  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T \neq \mathbf{0}$  gilt, so ist das empfangene Wort mit Fehlervektor  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$  gestört und muss vor dem Decodieren erst korrigiert werden. Welcher Fehler im einzelnen Fall vorliegt wird über das "Syndrom"  $\mathbf{s}$  bestimmt, welches wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T \neq \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{s} \in \{0, 1\}^{n-k}. \quad (6.4)$$

Aufgrund der Linearität des Codes und Gleichung (6.3), folgt mit  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$ :

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^T = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^T}_{= 0} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T. \quad (6.5)$$

Daher ist das Syndrom  $\mathbf{s}$  für Empfangsvektor  $\mathbf{y}$  alleine durch den Fehlervektor  $\mathbf{e}$  bestimmt und jedem Fehlervektor  $\mathbf{e}$  ist eindeutig ein Syndrom  $\mathbf{s}$  zugeordnet. Da im Allgemeinen deutlich mehr mögliche Fehlervektoren  $\mathbf{e}$  existieren, als es mögliche Syndrome  $\mathbf{s}$  gibt, kann von einem Syndrom  $\mathbf{s}$  nicht eindeutig auf den tatsächlich aufgetretenen Fehlervektor  $\mathbf{e}$  geschlossen werden. Wegen der nicht eindeutigen Zuordnung wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass bei einem gegebenen Syndrom  $\mathbf{s}$  der wahrscheinlichste passende Fehlervektor  $\mathbf{e}$  aufgetreten ist. Der wahrscheinlichste passende Fehlervektor ist der Fehlervektor mit dem geringsten Gewicht. Der so ermittelte Fehlervektor  $\mathbf{e}$  ist genau dann der tatsächliche Fehlervektor  $\mathbf{e}$ , wenn ein korrigierbarer Fehler aufgetreten ist. Ein Fehler ist dann korrigierbar, wenn gilt:

$$|\mathbf{e}| \leq \left\lfloor \frac{d_{\min}}{2} \right\rfloor, \quad (6.6)$$

wobei  $d_{\min}$  die minimale "Hamming Distanz" des Codes ist. Mit dem so ermittelten Fehlervektor  $\mathbf{e}$  kann mit  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \mathbf{e}$  das korrigierte Codewort  $\hat{\mathbf{x}}$  ermittelt werden.

Nachdem durch die Fehlerkorrektur sicher gestellt ist, dass ein gültiges Codewort vorliegt, kann dieses Codewort anschließend decodiert werden. Im Allgemeinen muss hierfür festgestellt werden, welche Linearkombination der Zeilen der Generator Matrix  $\mathbf{G}$  das Codewort  $\mathbf{x}$  ergibt. Dies ist bei jedem gültigen Codewort  $\mathbf{x}$  eindeutig. Falls ein sogenannter "systematischer" Code vorliegt, dann sind die Symbole des Informationsworts  $\mathbf{u}$  direkt im Codewort  $\mathbf{x}$  enthalten, und können daher direkt an den entsprechenden Stellen des Codeworts  $\mathbf{x}$  abgelesen werden.

## Bitfehlerrate

Die ‘‘Bitfehlerrate’’ oder ‘‘Bit Error Rate’’ (BER) ist ein häufig verwendetes Maß zur Bewertung der Fehler-sicherheit einer Übertragungsstrecke, insbesondere des darin verwendeten Kanalcodes. Die Bitfehlerrate gibt die mittlere Wahrscheinlichkeit an, dass ein Bit im Informationswort  $\mathbf{u}$  nach der Übertragung über den Kanal, der Demodulation und der Decodierung fehlerhaft ist.

Bei einem AWGN Kanal wird die Bitfehlerrate in Abhängigkeit des Rauschens auf dem Kanal gemessen. Das Maß  $E_S/N_0$  gibt das Verhältnis der mittleren Energie pro übertragenem Symbol zur mittleren Energie des Rauschens auf dem Kanal an. Man spricht auch allgemeiner vom ‘‘Signal-to-Noise-Ratio’’ (SNR). Das  $E_S/N_0$  wird meist in Dezibel (dB) angegeben. Hierbei gilt folgende Umrechnung:

$$E_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10}(E_{\text{lin}}). \quad (6.7)$$

Bei einem AWGN Kanal gilt für die mittlere Energie des Rauschens:

$$N_0 = \sigma_N^2. \quad (6.8)$$

Daher lässt sich für ein gegebenes  $E_S/N_0$  und  $E_S$  die entsprechende Varianz des Rauschens bestimmen.

In bestimmten Fällen wird statt dem  $E_S/N_0$  das Maß  $E_b/N_0$  verwendet, welches die Energie pro Bit anstatt der Energie pro Symbol im Verhältnis zur Rauschenergie misst. Dies wird meist in Fällen gemacht, bei denen ein Symbol mehrere Bits darstellt. Falls jedes Symbol jeweils ein Bit darstellt, so sind  $E_S/N_0$  und  $E_b/N_0$  identisch. Es gilt für  $M$ -stufige Modulation der Zusammenhang:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\text{ld}(M)} \cdot \frac{E_S}{N_0}, \quad (6.9)$$

wobei hier  $M$  die Anzahl Signalraumpunkte ist, die durch die Symbole der Modulation beschrieben werden.

Bei einem BSC wird die Bitfehlerrate in Abhängigkeit der Fehlerwahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  des BSC gemessen. Diese Sichtweise ist äquivalent zu der vorherigen Betrachtung, da die Fehlerwahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  des BSC von dem zugrundeliegenden physikalische Kanal abhängt. Die Bitfehlerrate ist für einen AWGN Kanal und bei einer BPSK Modulation gegeben durch:

$$P_{b|BPSK} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_S}{N_0}} \right), \quad (6.10)$$

wobei  $\text{erfc}$  die ‘‘komplementäre Fehlerfunktion’’ ist, gegeben durch:

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (6.11)$$

Desweiteren gilt für die Bitfehlerrate einer QPSK über einen AWGN Kanal:

$$P_{b|QPSK} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right). \quad (6.12)$$

## 6.2 Vorbereitungsarbeiten

### 6.2.1 Quellencodierung

Gegeben sei ein analoges Eingangssignal das mittels Puls-Code-Modulation in Zeit und Amplitude diskretisiert wird. Es werden hierbei sechs verschiedene Quantisierungsstufen  $q_1, \dots, q_6$  für die Amplituden verwendet. Jede dieser Quantisierungsstufen tritt innerhalb des analogen Eingangssignals mit einer bekannten

Wahrscheinlichkeit auf:

- $\Pr\{q_1\} = 0.09$
- $\Pr\{q_2\} = 0.11$
- $\Pr\{q_3\} = 0.26$
- $\Pr\{q_4\} = 0.3$
- $\Pr\{q_5\} = 0.14$
- $\Pr\{q_6\} = 0.1$

a) Führen Sie eine Quellencodierung nach Huffman (siehe Einleitung) entsprechend der gegebenen Wahrscheinlichkeiten  $\Pr\{q_i\}$  durch.

b) Berechnen Sie für diesen Huffman Code die durchschnittliche Länge eines Codewortes und die Entropie der Quelle (siehe Skript).

### 6.2.2 Fehlerkorrektur

Gegeben sei ein systematischer  $(7, 4, 3)_2$ -Hamming-Code, mit der folgenden Generator-Matrix:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

und der dazu gehörigen Parity-Check Matrix:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

a) Berechnen Sie für alle möglichen binären Fehlervektoren  $\mathbf{e}$  mit Gewicht 1 (dies wird im weiteren als 1-Bit-Fehler bezeichnet), d.h.  $|\mathbf{e}| = 1$ , das zugehörige Syndrom  $\mathbf{s}$  nach (6.4). Erstellen Sie die Syndromtabelle, welche jedem dieser Fehlervektoren  $\mathbf{e}$  das entsprechende Syndrom  $\mathbf{s}$  zuordnet.

b) Was fällt bei den Syndromen  $\mathbf{s}$  auf?

## 6.3 Versuchsdurchführung

### 6.3.1 Kanalcodierung

Gegeben sei eine binäre Quelle, welche Informationsworte  $\mathbf{u}$  der Länge  $k = 4$  produziert. Die binären Werte "0" und "1" werden hier als gleichwahrscheinlich angenommen. Um ein Informationswort aus  $k$  Symbolen einer solchen Datenquelle in MATLAB zu erzeugen, nutzen Sie den folgenden Befehl: `round(rand(1, k))`.

Die Informationswörter der Quelle werden zum Schutz gegen Fehler mit dem in Abschnitt 6.2.2 angegebenen  $(7, 4, 3)_2$ -Hamming-Code codiert.

a) Erstellen Sie in MATLAB eine Funktion, welche die Kanalcodierung eines Informationsworts  $\mathbf{u}$  mittels des gegebenen  $(7, 4, 3)_2$ -Hamming-Codes durchführt. Erweitern Sie hierzu den gegebenen Funktionsrumpf `encoder`, der ein Informationswort  $\mathbf{u}$  als Eingang erhält und das zugehörige Codewort  $\mathbf{x}$  als Ausgang ausgibt.

**Hinweis:** Beachten Sie, dass die Codierung eine binäre Operation ist. Da in MATLAB eine Addition oder Multiplikation über reellen Zahlen berechnet wird, müssen Sie bei jeder Addition oder Multiplikation binärer Werte die Modulo-Operation auf das Ergebnis anwenden. Verwenden Sie hierfür in MATLAB den Befehl: `mod(x, 2)`.

b) Erweitern Sie das MATLAB-Skript `aufgabe_6_3_1` so, dass ein Informationswort  $\mathbf{u}$  erzeugt wird, welches anschliessend mit `encoder` codiert wird. Überprüfen Sie die so entstehenden Codeworte  $\mathbf{x}$  auf Korrektheit.

### 6.3.2 Decodierung und Fehlerkorrektur

Das Codewort  $\mathbf{x}$  wird nun über einen BSC übertragen und dabei mit einem binären Fehlervektor  $\mathbf{e}$  gestört. Zuerst soll angenommen werden, dass maximal nur ein einzelnes Bit innerhalb eines Codewortes  $\mathbf{x}$  gestört wird. Da der verwendete  $(7, 4, 3)_2$ -Hamming-Code eine minimale Hamming-Distanz von  $d_{\min} = 3$  hat, sind alle 1-Bit-Fehler korrigierbar.

a) Schreiben Sie eine Funktion in MATLAB, die zuerst das Syndrom  $\mathbf{s}$  für ein empfangenes Wort  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$  bestimmt, dann mit Hilfe des Syndroms  $\mathbf{s}$  den Fehler korrigiert und anschließend das korrigierte Codewort  $\hat{\mathbf{x}}$  decodiert. Erweitern Sie hierzu den gegebenen Funktionsrumpf `decoder`, der das empfangene Wort  $\mathbf{y}$  als Eingang erhält und das decodierte Informationswort  $\hat{\mathbf{u}}$  zurück gibt. Beachten Sie, wie im vorherigen Abschnitt, die Modulo-Operation bei jeder Multiplikation oder Addition von binären Werten.

**Hinweis:** Beachten Sie bei der Decodierung, dass der verwendete Hamming-Code systematisch ist.

b) Erweitern Sie das MATLAB Skript `aufgabe_6_3_2` so, dass ein wie in `aufgabe_6_3_1` gegebenes Codewort  $\mathbf{x}$  mit einem 1-Bit-Fehlervektor  $\mathbf{e}$  gestört wird und anschließend mit `decoder` decodiert wird. Zeigen Sie, dass alle 1-Bit Fehler korrekt decodiert werden.

c) Welches Verhalten des Decoder ist bei zwei oder mehr Bit-Fehlern zu erwarten?

### 6.3.3 Bitfehlerrate über BSC

Für eine vereinfachte Übertragungsstrecke bestehend aus einer Quelle, einem Kanalcoder, einem BSC, einem Kanaldecoder und einer Senke soll die Bitfehlerrate in Abhängigkeit von der Fehlerwahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  des BSCs bestimmt werden.

a) Ermitteln Sie die Bitfehlerrate nach der Decodierung für die Übertragung eines Codewortes  $\mathbf{x}$  über einen BSC, wobei die Fehlerwahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  im Bereich von 0 bis 0.5 liegt. Erstellen Sie dazu im MATLAB Skript `aufgabe_6_3_3` die Übertragungsstrecke und nutzen Sie für den BSC in MATLAB die gegebene Funktion `BSC`. Um die Ergebnisse mit MATLAB graphisch darzustellen, nutzen Sie den Befehl `semilogy( $\varepsilon$ , BER)`.

b) Welche Bitfehlerrate ist zu erwarten, wenn ohne Kanalcodierung über den beschriebenen BSC übertragen wird? Zeigen Sie diese Bitfehlerrate im Vergleich zu der aus Teil a) in einer Grafik.

### 6.3.4 Bitfehlerrate mit BPSK über AWGN Kanal

Das Codewort  $\mathbf{x}$  wird nun mit einer BPSK moduliert und anschließend über einen AWGN-Kanal übertragen. Verwenden Sie folgende Zuordnung für die BPSK Modulation:

$$\begin{aligned}x_i = 0 &\rightarrow \tilde{x}_i = 1 \\x_i = 1 &\rightarrow \tilde{x}_i = -1\end{aligned}$$

a) Schreiben Sie eine Funktion in MATLAB, welche ein kanalcodiertes Codewort  $\mathbf{x}$  auf modulierte Symbole  $\tilde{\mathbf{x}}$  abbildet. Erweitern Sie hierzu den gegebenen Funktionsrumpf `modulator_BPSK`.

Das modulierte Codewort  $\tilde{\mathbf{x}}$  wird nun über einen AWGN-Kanal übertragen. Um den Rauschterm  $\mathbf{n} \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  mit  $m$  Elementen in MATLAB zu erzeugen, nutzen sie den Befehl:  `$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} * \text{randn}(1, m)$` .

b) Erweitern Sie in MATLAB den Funktionsrumpf `demodulator_BPSK` so, dass diese verrauschte Empfangssymbole  $\tilde{\mathbf{y}}$  als Eingang erhält und das demodulierte binäre Empfangswort  $\mathbf{y}$  als Ausgang ausgibt. Nutzen Sie für die hard-decision in MATLAB die Signum Funktion: `sign(x)`.

c) Erweitern Sie das MATLAB Skript `aufgabe_6_3_4` um die Übertragungsstrecke bestehend aus einer binärer Quelle, einem Kanalencoder, einem Modulator, einem Kanal, einem Demodulator und einem Kanaldecoder (die Senke wird nicht explizit implementiert). Nutzen Sie hierfür die in Aufgabenteilen 6.3.1, 6.3.2 und 6.3.4 a), b) erstellten Funktionen und verwendeten Befehle.

d) Ermitteln Sie mit der in `aufgabe_6_3_4` erstellten Übertragungsstrecke die Bitfehlerrate nach der Decodierung für ein  $E_S/N_0$  im Bereich von 0dB bis 10dB (Umrechnung von dB beachten!). Um die Ergebnisse mit MATLAB graphisch darzustellen, nutzen Sie den Befehl `semilogy(E_S/N_0, BER)`.

e) Messen Sie in demselben  $E_S/N_0$  Bereich, wie in Teil d), die Bitfehlerrate für den Fall, dass keine Kanalcodierung und Kanaldecodierung durchgeführt wird, also uncodierte modulierte Wörter übertragen werden. Beachten Sie, dass sich hierdurch die Wortlänge am Eingang des Modulators ändert.

f) Vergleichen Sie die simulierten Ergebnisse der Bitfehlerrate für den codierten und uncodierten Fall mit der Bitfehlerrate für einen AWGN-Kanal (siehe Einführung). Nutzen Sie die MATLAB Funktion `erfc(x)` zur Berechnung der Bitfehlerrate des AWGN Kanals. Um mehrere Fehlerkurven in einem Graph darzustellen, nutzen Sie in MATLAB den Befehl `semilogy(E_S/N_0, BER_1, E_S/N_0, BER_2, ...)`.

### 6.3.5 Bitfehlerrate mit QPSK über AWGN Kanal

Anstatt mit einer BPSK Modulation wird nun mit einer QPSK moduliert. Für diesen Abschnitt wird folgende Zuordnung für die QPSK Modulation verwendet:

$$\begin{aligned}x_i = 0, x_{i+1} = 0 &\rightarrow \tilde{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + j) \\x_i = 0, x_{i+1} = 1 &\rightarrow \tilde{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 - j) \\x_i = 1, x_{i+1} = 0 &\rightarrow \tilde{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1 + j) \\x_i = 1, x_{i+1} = 1 &\rightarrow \tilde{x}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1 - j)\end{aligned}$$

Da bei einer QPSK auch die komplexe Raumrichtung im Symbolraum genutzt wird, muss auch ein komplexer Rauschterm betrachtet werden. Bei komplexem weißem Gaußschem Rauschen wird davon

ausgegangen, dass das Rauschen aus einer reellen und komplexen Komponente mit gleicher Varianz besteht, die sich additiv überlagern. Nutzen Sie für den komplexen Rauschterm  $\mathbf{n}$  aus  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  Elementen in MATLAB den Befehl  $\frac{\sigma}{\sqrt{2}} * (\text{randn}(1, \lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1i * \text{randn}(1, \lceil \frac{n}{2} \rceil))$ .

**Hinweis:** Damit das Codewort  $\mathbf{x}$  mit QPSK moduliert werden kann, nehmen Sie an, dass auf das letzte Symbol in  $\mathbf{x}$  immer ein "0" Symbol folgt (zero-padding) und modulieren Sie dies zusammen mit dem letzten Symbol in  $\mathbf{x}$ .

a) Erweitern Sie, wie in Abschnitt 6.3.4, in MATLAB die gegebenen Funktionrümpfe `modulator_QPSK` und `demodulator_QPSK` für die Modulation, beziehungsweise Demodulation, mit einer QPSK. Nutzen Sie bei der Demodulation wieder die Signum Funktion für die hard-decision und führen Sie die hard-decision separat für den Real- und Imaginärteil durch. Den Realteil einer Variable erhalten Sie in MATLAB mit `real(ŷ)`, und den Imaginärteil mit `imag(ŷ)`.

b) Messen Sie, wie in Abschnitt 6.3.4 beschrieben, die Bitfehlerrate dieser Übertragungsstrecke (nutzen Sie hierfür das MATLAB Skript `aufgabe_6_3_5`). Hierbei sollen die Fälle mit und ohne Kanalcodierung, aber jeweils mit QPSK Modulation, gemessen werden. In beiden Fällen ist ein komplexer Rauschterm für den AWGN-Kanal zu verwenden.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse für die QPSK Modulation mit denen der BPSK Modulation aus Abschnitt 6.3.4 und der Bitfehlerrate für einen AWGN-Kanal (siehe Einführung) in einer Grafik. Was fällt hierbei auf und wie ist das zu erklären?

## Appendix A

# Einleitung zu Matlab

Das Programm Matlab (MATrix-LABoratory) ist ein vielseitiges und doch einfach zu erlernendes Werkzeug zur Erstellung mathematischer Berechnungen. Ausführliche Informationen finden sich unter [www.mathworks.de](http://www.mathworks.de) bzw. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com). Weiterhin stehen eine Vielzahl an ausführlichen und detaillierten Einführungen im Internet zur Verfügung, z.B.

- T. Schubiger: Ausführliches Skript der ETH Zürich  
[www.imrt.ethz.ch/education/tutorials/matlab/grundlagen\\_P.pdf](http://www.imrt.ethz.ch/education/tutorials/matlab/grundlagen_P.pdf)
- Einführung in Matlab von P. Arbenz, ETH Zürich  
<http://people.inf.ethz.ch/arbenz/MatlabKurs/matlabintro.pdf>
- C. Moler: Numerical Computing with MATLAB (Buch mit umfassender Einführung)  
[www.mathworks.com/moler/](http://www.mathworks.com/moler/)
- MATLAB Primer, 3rd edition, Kermit Sigmon  
<http://www.math.toronto.edu/mpugh/primer.pdf>

Da das Labor selber unter Linux ausgeführt wird (es ergeben sich dabei keine Unterschiede zwischen Linux- und Windows-Version von Matlab), soll im Folgenden kurz der Aufruf von Matlab vorgestellt werden.

### Matlab starten:

Öffnen Sie einen Terminal (Shell) unter Linux durch Klicken auf dieses Symbol. In dem geöffneten Terminal geben Sie `matlab` zum Starten von Matlab ein.



Nach dem Start von Matlab wird ein Fenster wie im rechten Teil von Bild A.1 geöffnet. Das dargestellte Befehls-Fenster (*Command Window*) ist der Ort, an dem Sie Matlab- Befehle eingeben werden. Ein Befehl wird rechts vom Doppelpfeil eingetippt und mit der **Enter**-Taste abgeschlossen. Er wird dann von

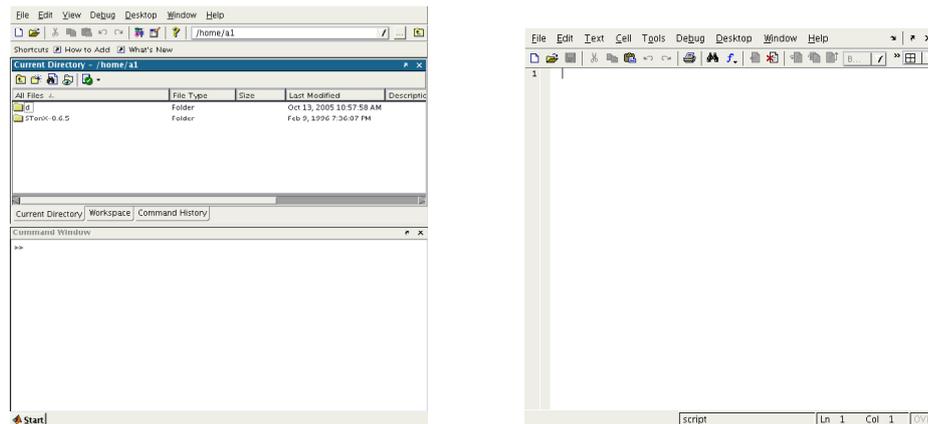


Figure A.1: Matlab Workspace und Matlab Editor

Matlab ausgeführt. Eine ganze Reihe von Befehlen können zusammen in einer Datei mit der Endung `.m` abgespeichert werden (siehe Öffnen eines Editors). Solche Dateien werden M-Files genannt. Die Datei wird im Befehls-Fenster mit ihrem Namen (ohne Endung) aufgerufen. Der Benutzer kann die Datei `prog1.m` also mit dem Befehl `prog1` starten. Dazu muss sich die Datei im aktuellen Verzeichnis (*current directory*) befinden, welches in der Befehlsleiste oben ausgewählt wird, oder in einem Verzeichnis des `matlabpath` befinden.

Im oberen Bereich des Fensters sind mehrere Teilfenster in Form von Tags dargestellt. Im *Command History* werden Befehle gespeichert, die Sie bereits ausgeführt haben. Durch Klick auf einen Befehl in diesem Fenster wird der Befehl ins Befehlsfenster kopiert und bei einem Doppelklick erneut ausgeführt. Im Teilfenster *Current Directory* werden die Files des gegenwärtige Verzeichnisses angezeigt und der Arbeitsspeicher von Matlab ist unter *Workspace* aufgeführt. Hierin befinden sich die Variablen, die sie angelegt haben. Durch einen Doppelklick auf den Variablenamen wird ein *Arrayeditor* geöffnet, mit welchem man die Matrixelemente editieren kann.

Matlab bietet vielfältige Hilfen an. Help an der oberen Befehlsleiste eröffnet ein neues Teilfenster, welches sämtliche Hilfsangebote von Matlab auflistet. Neben der Dokumentation einzelner Befehle finden sich hier auch ein Matlab- Einführungskurs (*Getting Started*), ein Benutzer-Handbuch (*User Guide*), Demos, pdf-Files der Dokumentation, und vieles mehr.

## Ändern des Verzeichnis:

Geben Sie `cd glab` im Matlab Command Window ein, um in das Verzeichnis *glab* zu wechseln. Hier können Sie alle Dateien speichern, die Sie während der Laborversuche erstellen. Um sich zu vergewissern, in welchem Verzeichnis man sich befindet, kann man `pwd` im Command Window eingeben und erhält als Ergebnis den aktuellen Pfad.

## Öffnen des Editors:

Geben Sie `edit` im Command Window ein, um den Editor mit einer unbenannten Datei zu öffnen. In dieser Datei können Matlab-Programme bearbeitet, gespeichert, etc. werden. Vor dem ersten Start Ihres Programms, muss dieses zunächst gespeichert werden, beispielsweise unter *prog1.m*. Danach kann das Programm durch Eingabe von `prog1.m` im Command Window gestartet werden. Dabei ist zu beachten, dass sich die Datei in dem aktuellen Pfad befindet, ansonsten findet Matlab die Datei nicht. Alternativ kann das Programm im Editor auch durch Betätigen der Taste F5 gestartet werden. Diese Option ist empfehlenswert, um das Programm im Debug-Modus laufen zu lassen.



## Appendix B

# Übersicht zu den Befehlen

### Zuordnung von Zahlen, Vektoren und Matrizen

<code>A = 1;</code>	Variable $A$ wird der Wert 1 zugewiesen, Semikolon unterdrückt Bildschirmausgabe
<code>A = 1:20;</code>	Array (Zeilenvektor) $A$ mit den Elementen 1 bis 20
<code>A = 2:5:25;</code>	Array (Zeilenvektor) $A$ mit Werten von 2 bis 25 mit der Schrittweite 5: $A = [2, 7, 12, 17, 22]$
<code>A = [1,2,3];</code>	Array (Zeilenvektor) $A = (1\ 2\ 3)$
<code>A = [1;2;3];</code>	Array (Spaltenvektor) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
<code>A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9]</code>	Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
<code>B = A(:);</code>	$A$ in Spaltenvektor wandeln (Spaltenweise von links nach rechts) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$
<code>B = A(1);</code>	$B$ wird das erste Element aus $A$ zugewiesen (Index beginnt mit 1 nicht mit 0 wie bei C/C++)
<code>B = A(1,2);</code>	$B$ wird das Element aus der 1. Zeile der 2. Spalte von $A$ zugewiesen (also hier 2)
<code>B = A(2:3,1:3);</code>	$B$ wird ist eine $2 \times 3$ Submatrix bestehend aus den Zeilen 2 bis 3 und den Spalten 1 bis 3: $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
<code>A = [a;b;c];</code>	Matrix $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mit den Zeilenvektoren $a = [1, 2, 3]$ , $b = [4, 5, 6]$ , $c = [7, 8, 9]$
<code>D = [A,B,C];</code>	Matrix $D = [A\ B\ C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ , $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$
<code>A = B + j*C</code>	Erzeugt komplexe Matrix mit Realteil $B$ und Imaginärteil $C$
<code>A = zeros(y,x);</code>	Erzeugt Matrix mit $y$ Zeilen und $x$ Spalten initialisiert mit 0.
<code>A = zeros(z);</code>	Erzeugt $z \times z$ Matrix initialisiert mit 0.
<code>A = ones(y,x);</code>	Erzeugt Matrix analog zu <code>zeros()</code> initialisiert mit 1.

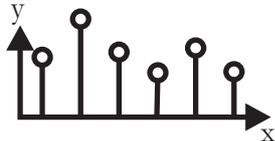
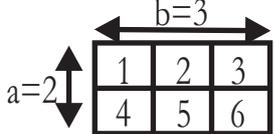
## Operatoren

---

+	-	Addition, Subtraktion	
*	/	^	(Matrix)- Multiplikation, Division, Potenz
.*	./	.^	Elementweise Multiplikation, Division, Potenz
'	.'		Transjungtierte, Transponierte

## Grafik

---

<code>stem(x,y)</code>		y-Werte über x-Achse aufgetragen. <code>stem(y)</code> erzeugt eigene X-Achse mit der Länge von y
<code>plot(x,y,option)</code>		Analog zu <code>stem()</code> , mit zusätzlichen Optionen (Farbe, Linien-Form..)
<code>subplot(a,b,c)</code>		unterteilt das Bild und legt aktuelles Teilbild fest

## Grafik

---

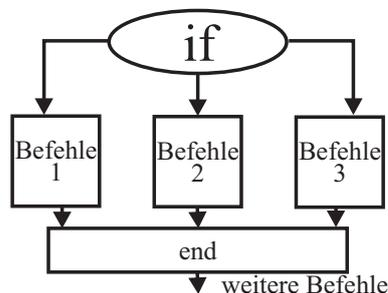
<code>figure</code>	Öffnet ein neues Figure.
<code>figure(x)</code>	Figure mit der Nummer x wird als aktuelles Figure gesetzt.
<code>hold on</code>	Aktuelles Bild wird nicht mehr überschrieben. Neue Plots werden eingefügt.
<code>hold off</code>	Aktuelles Bild wird freigegeben. Nur <code>hold</code> springt zw. freigegebenen und festen Zustand hin und her.
<code>grid</code>	Gitter an aus, analog zu <code>hold</code>
<code>axis([<math>x_{min}</math> <math>x_{max}</math> <math>y_{min}</math> <math>y_{max}</math>])</code>	Legt Achsenausschnitt fest
<code>xlabel('Text')</code>	X-Achsenbeschriftung, ( <code>ylabel()</code> , <code>zlabel()</code> , <code>title()</code> analog)

## wichtige Funktionen

<code>help &lt; fkt &gt;</code>	gibt Hilfstext zur Funktion <i>fkt</i> , z.B: <i>help imag</i>
<code>doc &lt; fkt &gt;</code>	gibt ausführliche Hilfe zur Funktion <i>fkt</i> , z.B: <i>doc imag</i>
<code>i, j, pi</code>	vorgegebene Konstanten (können überladen werden)
<code>real(x), imag(x)</code>	Real-Teil bzw. Imaginär-Teil von <i>x</i>
<code>exp</code>	Exponentialfunktion
<code>sin(x), cos(x)</code>	Sinus bzw. Kosinus ( <i>x</i> in rad!)
<code>tan(x), cot(x)</code>	Tangens bzw. Kotangens ( <i>x</i> in rad!)
<code>asin(x), acos(x)</code>	Arkus-Sinus bzw. Arkus-Kosinus
<code>atan(x), acot(x)</code>	Arkus-Tangens bzw. Arkus-Kotangens
<code>[a,b]=size(x)</code>	gibt die Größe von <i>x</i> aus ( <i>a</i> = Anzahl der Zeilen, <i>b</i> = Anzahl der Spalten)
<code>length(x)</code>	Länge des Vektors <i>x</i> , entspricht <i>max(size(x))</i>
<code>sum(x)</code>	Summe des Vektors <i>x</i> bzw. Summe aller Spalten der Matrix <i>x</i>
<code>max(x)</code>	Bildet das Maximum, analog zu <i>sum(x)</i> bzw. <i>min(x)</i>

## Steuerung des Programmablaufs

<code>for i=a:s:e</code> <statements> <code>end;</code>	<code>for</code> - Schleife mit Anfangswert <i>a</i> und Endwert <i>e</i> sowie der optionalen Stufigkeit <i>s</i> . Anstelle dessen sind auch Konstrukte der Form <i>i</i> = [ <i>x</i> <sub>1</sub> <i>x</i> <sub>2</sub> .. <i>x</i> <sub><i>n</i></sub> ] zulässig. Schleife wird <i>n</i> -mal durchlaufen, mit den Indizes <i>x</i> <sub>1</sub> <i>x</i> <sub>2</sub> .. <i>x</i> <sub><i>n</i></sub>
<code>if &lt;A1&gt;;</code> <statements1> <code>elseif &lt;A2&gt;</code> <statements2> <code>else</code> <statements3> <code>end;</code>	<code>if</code> Konstrukt, verzweigt den Programmablauf. Ausdrücke (Bedingungen) <i>A1</i> und <i>A2</i> haben oftmals die Form: <i>a</i> > <i>b</i> , <i>a</i> == <i>b</i> , <i>a</i> <= <i>b</i> , ... Die <i>else</i> und <i>elseif</i> - Anweisungen sind optional. Siehe hierzu Bild B.1

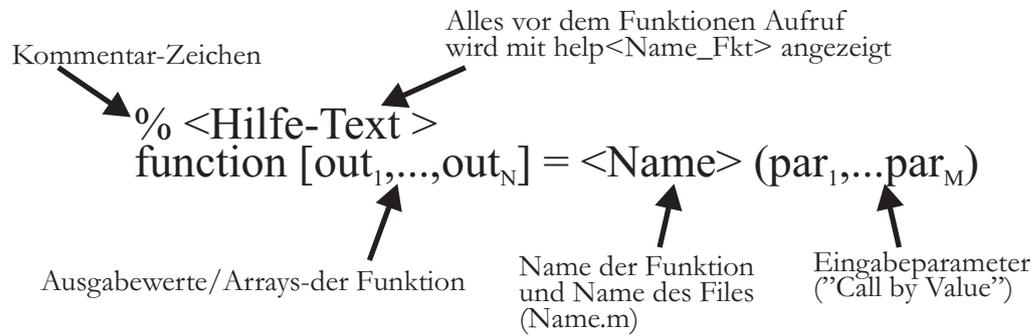


**Figure B.1:** *if*-Verzweigungen

---

## Funktionen-Header

---



Im Programm erfolgt dann der Aufruf:

```
[out1,...,outN] = <Name> (par1,...,parM)
```