

Vorlesungsskript Kanalcodierung II

von
DR.-ING. VOLKER KÜHN

aktualisiert von
DR.-ING. DIRK WÜBBEN

Fachbereich Physik/Elektrotechnik (FB 1)
Arbeitsbereich Nachrichtentechnik
Postfach 33 04 40
D-28334 Bremen

Version 2.4

(04.04.2011)

Kapitel 2

Trelliscodierte Modulation (TCM)

2.1 Einführung

Im ersten Teil der Vorlesung 'Kanalcodierung I' wurden verschiedene Verfahren der Kanalcodierung zur Fehlererkennung und Fehlerkorrektur vorgestellt. Alle Verfahren basieren auf der Technik, dem Datenstrom Redundanz hinzuzufügen. Hierdurch wird nur ein Teil der möglichen Sequenzen tatsächlich zur Übertragung verwendet, so dass sich die Distanz zwischen gültigen Codefolgen erhöht. Anhand der zugefügten Redundanz ist es dann möglich, Fehler zu erkennen und sogar zu korrigieren.

Für viele Kanäle ist die jedem Nutzer zur Verfügung stehende Bandbreite jedoch streng begrenzt (Beispiel: Telefonkanäle, ca. 3 kHz). Bei einer binären Modulation können schon im uncodierten Fall nur geringe Datenraten übertragen werden. Eine zusätzliche Kanalcodierung würde die Datenrate weiter reduzieren, so dass eine Datenübertragung über derartige Kanäle unattraktiv wird. Eine Lösung dieses Problems bietet die **Codierte Modulation**, die Kanalcodierung und hochstufige Modulation gewinnbringend miteinander kombiniert. Aus diesem Grund beschäftigt sich der nächste Abschnitt mit mehrstufigen linearen Modulationsverfahren, die schon aus der Vorlesung 'Nachrichtenübertragung' bekannt sein dürften.

Historie

Die Entwicklung der codierten Modulation geht zurück auf die 70er und 80er Jahre.

1977: Mehrstufencodes (*Multilevel Codes*) mit Kaskadierter Decodierung (*Multistage Decoding*)
Erstes praktisches Verfahren von Imai / Hirakawa (fand zunächst keine große Beachtung)

1982: Trelliscodierte Modulation von Ungerböck
Bahnbrechende Arbeit von Gottfried Ungerböck; Durchbruch in vielen Anwendungsbereichen wie der Modemtechnik und der Satellitenkommunikation

2.2 Lineare digitale Modulationsverfahren

2.2.1 Grundlagen

Im letzten Semester wurden in Zusammenhang mit der Codierung ausschließlich binäre Modulationsverfahren, wie z.B. BPSK bzw. 2-ASK betrachtet. Die Sendesymbole waren somit antipodale Signale mit den Werten $x(l) = \pm\sqrt{E_s/T_s}$, d.h. es kann $m = 1$ Binärstelle je Symbol übertragen werden. Bei der Codierte Modulation betrachten wir in dieser Vorlesung dagegen mehrstufige Modulationsverfahren, und zwar die M -PSK sowie die M -QAM. Sie gelten als bandbreiteneffiziente Verfahren, da sie mit zunehmender Stufigkeit immer weniger

Bandbreite bei konstanter Informationsrate benötigen. Dazu ändern wir die Notation gegenüber dem letzten Semester geringfügig.

Der Kanalcodierer erhält nun Vektoren $\mathbf{u}(l) = (u_1(l) \cdots u_k(l))$ der Länge k mit binären Elementen $u_i(l) \in \{0, 1\}$ im Symboltakt T_s . Er liefert dann im gleichen Takt Vektoren $\mathbf{c}(l) = (c_0(l) \cdots c_{m-1}(l))$ mit $c_i(l) \in \{0, 1\}$ und $m > k$, die dann im Signalraumcodierer (*Mapper*) auf eines von $M = 2^m$ skalaren Kanalsymbolen $x(l)$ abgebildet werden. Die modifizierte Struktur des Datenübertragungssystems ist in Bild 2.1 dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass der Signalraumdecodierer nicht unbedingt hart entschiedene Werte liefern muss, sondern er kann auch *Soft-Werte* berechnen (vgl. Kapitel 1). Dies wäre dann für den nachfolgenden Decodierer von Vorteil.

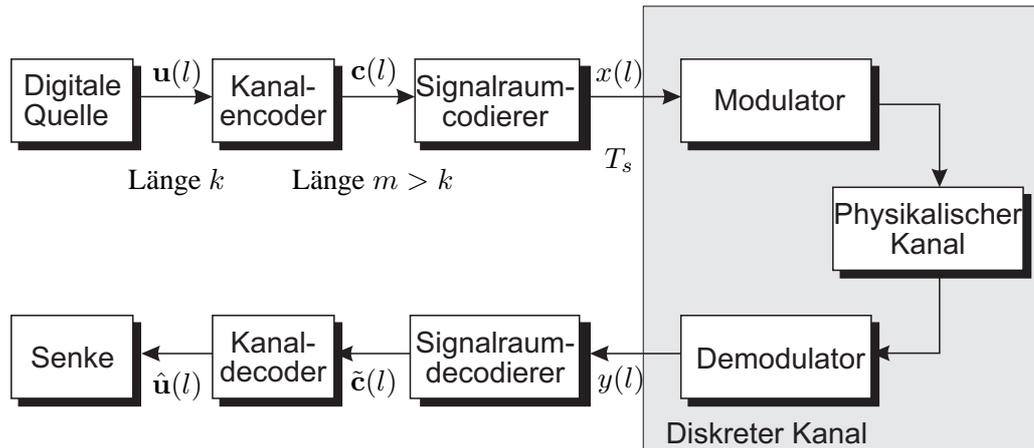


Bild 2.1: Blockschaltbild des digitalen Übertragungssystems

Im Rahmen der Vorlesung beschränken wir uns auf lineare digitale Modulationsverfahren, also beispielsweise Phasen- und Amplitudenmodulation. Nichtlineare Verfahren wie z.B. CPM (*Continuous Phase Modulation*), zu der auch die im GSM-Standard verwendete MSK (*Minimum Shift Keying*) gehört, sollen hier nicht behandelt werden. Bild 2.2 zeigt typische Signalraumkonstellationen linearer Modulationsverfahren. Es ist zu beachten, dass die Signale jetzt in der Regel komplexwertig sind. Im letzten Semester konnten wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit von reellen Symbolen ausgehen. Dies gilt nun nicht mehr, was direkte Auswirkungen auf die Berechnung von Fehlerwahrscheinlichkeiten und Metriken mit sich bringt. Die Größe Δ_0 beschreibt in Bild 2.2 den euklidischen Abstand zwischen benachbarten Symbolen in Abhängigkeit der Symbolenergie E_s/T_s und stellt somit die kleinste euklidische Distanz im Signalraum dar.

Selbstverständlich enthält Bild 2.2 nur eine kleine Auswahl von Modulationsverfahren. *State-of-the-Art* TCM-Verfahren verwenden heute die 960-QAM, um über Telefonkanäle Datenraten von bis zu 56 kbit/s zu übertragen. Dabei ist zu beachten, dass die Symbolrate und damit die Signalbandbreite weiterhin auf 3,2 kHz begrenzt sind. Im Rahmen dieser Vorlesung sollen anhand einiger überschaubarer Beispiele die Prinzipien der Codierten Modulation veranschaulicht werden.

Es stellt sich weiterhin die Frage, wie der Signalraumcodierer die binären Daten der codierten Sequenz $\mathbf{c}(l)$ auf die Symbolfolge $x(l)$ abbildet. Normalerweise wird ohne Berücksichtigung der Kanalcodierung ein **Gray-Code** gewählt. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass sich benachbarte Symbole bezüglich ihrer binären Kennung nur durch ein Bit unterscheiden. Eine derartige Zuordnung garantiert nun, dass beim Verwecheln zweier benachbarter Symbole nur ein einzelnes Bit gestört wird. Da diese Art der Verwechslung die häufigste ist, wird somit eine minimale Bitfehlerrate erzielt. Bild 2.3 zeigt die entsprechende Gray-Codierung für die obigen Modulationsverfahren.

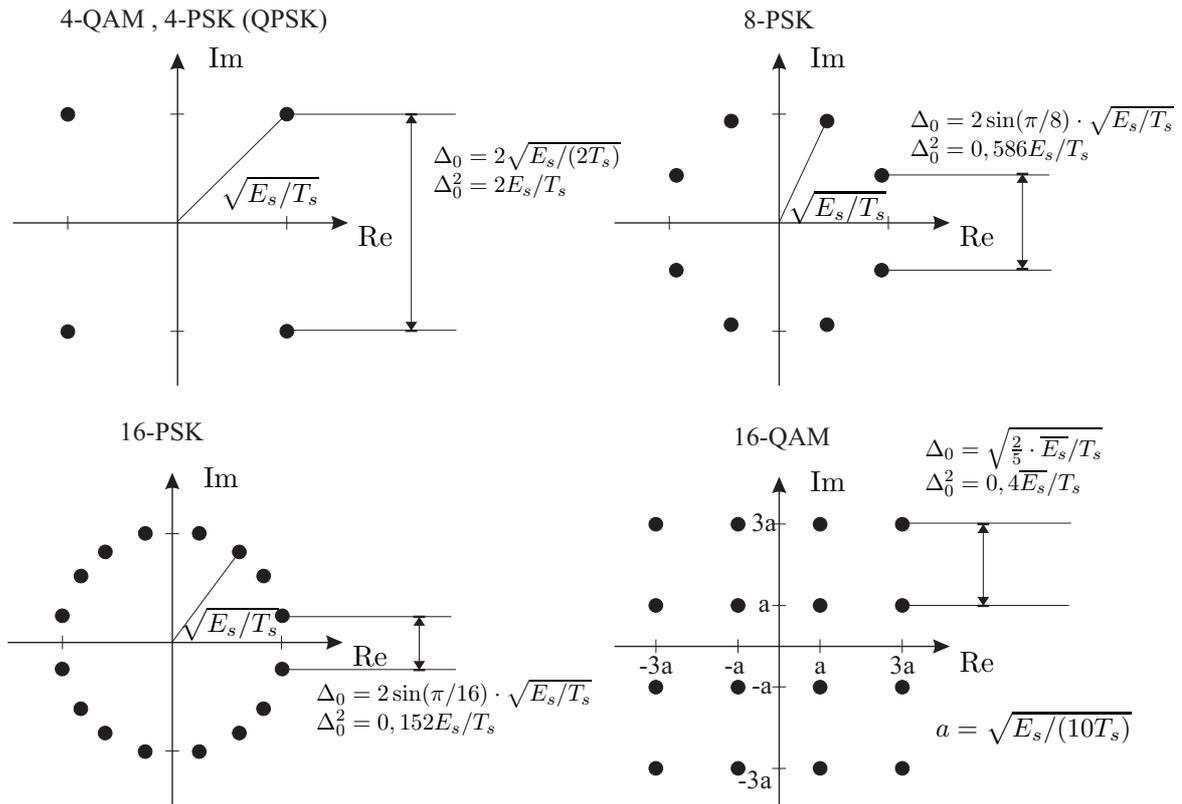


Bild 2.2: Signalraumdiagramme für einige hochstufige lineare Modulationsverfahren

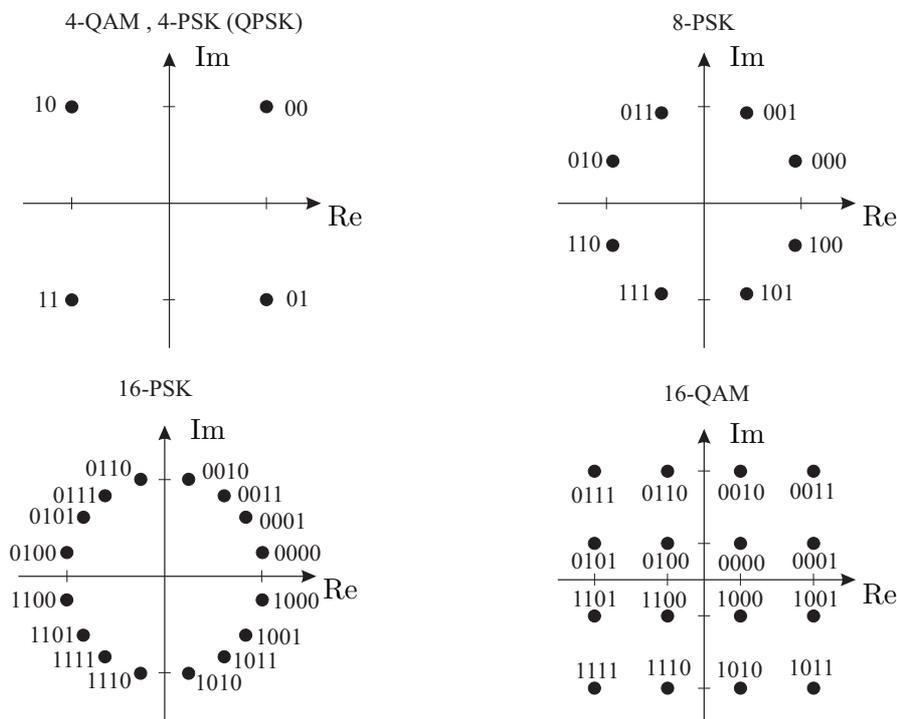


Bild 2.3: Gray-Codierung für einige lineare Modulationsverfahren

2.2.2 Bandbreiteneffizienz linearer Modulationsverfahren

Ein wichtiges Maß zur Beurteilung eines Modulationsverfahrens ist die Bandbreiteneffizienz. Sie spielt insbesondere bei der codierten Modulation eine wesentliche Rolle und hängt nicht nur von der Stufigkeit des

Modulationsverfahrens, sondern auch von der Impulsformung mit dem Tiefpaß $g_r(t)$ ab. Bei einer Symbolrate r_s beträgt die Symboldauer $T_s = 1/r_s$, wodurch sich mit $g_r(t)$ die Bandbreite

$$B = \frac{\alpha}{T_s} \quad (2.1)$$

ergibt. Der Wert α im Zähler von Gl. (2.1) hängt dabei direkt von der Impulsformung ab. Dies soll anhand eines Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel: Kosinus-roll-off-Impulsformung

Die Impulsantwort eines Kosinus-roll-off-Filters hat bekanntermaßen die Form

$$g_r(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_s}\right)}{\pi \frac{t}{T_s}} \cdot \frac{\cos\left(\pi r \frac{t}{T_s}\right)}{1 - \left(2r \frac{t}{T_s}\right)^2} = \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N t} \cdot \frac{\cos(\omega_N r t)}{1 - (4f_N r t)^2},$$

wobei $f_N = \omega_N/(2\pi) = 1/(2T_s)$ die Nyquist-Frequenz bezeichnet. Das zugehörige Spektrum lautet

$$G_r(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_N} \leq 1 - r \\ \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2r}\left(\frac{|\omega|}{\omega_N} - (1 - r)\right)\right)\right] & \text{für } 1 - r \leq \frac{|\omega|}{\omega_N} \leq 1 + r \\ 0 & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_N} \geq 1 + r \end{cases} .$$

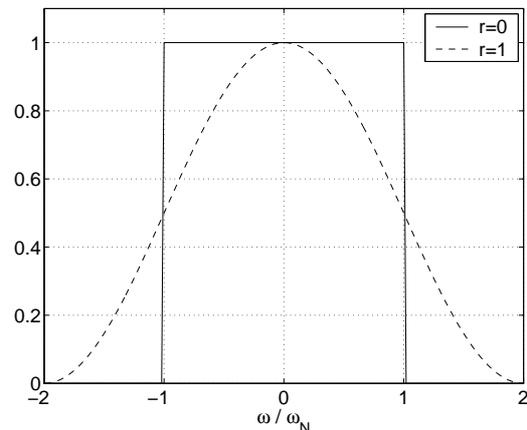
Damit ergibt sich z.B. für die beiden Extremfälle $r = 0$ (idealer Tiefpaß) und $r = 1$:

$$G_{r=0}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_N} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies B = 2f_N = \frac{1}{T_s} = r_s \implies \alpha = 1$$

$$G_{r=1}(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_N}\right)\right] & \text{für } \frac{|\omega|}{\omega_N} \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\implies B = 4f_N = \frac{2}{T_s} = 2r_s \implies \alpha = 2$$



Für den idealen Tiefpaß entspricht die Bandbreite B im Übertragungsband (bei angenommener Verschiebung ins Übertragungsband durch eine Amplitudenmodulation) der Symbolrate r_s bzw. dem Kehrwert der Symboldauer T_s . Es ist zu beachten, dass im äquivalenten Basisband nur die Hälfte der Bandbreite benötigt wird (AM verdoppelt die Bandbreite). Ein Kosinus-roll-off-Filter mit $r = 1$ benötigt dagegen die doppelte Bandbreite $B = 2/T_s$. **Im weiteren Verlauf soll idealisierend stets der ideale Tiefpaß ($\alpha = 1$) angenommen werden!**

Definition der spektralen Effizienz:

$$\eta = \frac{\text{Info-Datenrate}}{\text{Bandbreite}} = \frac{r_b}{B} = \frac{1/T_b}{\alpha/T_s} = \frac{T_s}{T_b} = m \quad (2.2)$$

Für den idealen Tiefpaß gilt also, dass die spektrale Effizienz η im Übertragungsband gleich der Anzahl Bit je Kanalsymbol ist.

2.2.3 Fehlerwahrscheinlichkeit linearer Modulationsverfahren

Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit linearer Modulationsverfahren soll nun die Fehlerwahrscheinlichkeit betrachtet werden. Wir nehmen dazu einen AWGN-Kanal nach Bild 2.4 mit spektraler Rauschleistungsdichte $N_0/2$ an, wobei zu beachten ist, dass die Größen $x(l)$, $n(l)$ und $y(l)$ nun komplexwertig sein können.

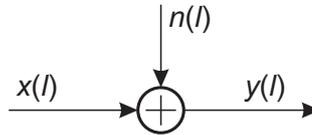


Bild 2.4: Darstellung AWGN-Kanal

- Symbolfehlerwahrscheinlichkeit nach *Maximum Likelihood*-Kriterium

$$P_s = P(\|y(l) - x(l)\|^2 > \|y(l) - x'(l)\|^2) \quad \forall \quad x(l), x'(l) \in \mathcal{A}_{in}, x(l) \neq x'(l) \quad (2.3)$$

- Exakte Berechnung der Fehlerrate i.a. sehr aufwendig

→ Näherung: In den meisten Fällen werden direkt benachbarte Symbole verwechselt, da sie die geringste euklidische Distanz zueinander besitzen!

→ Wahrscheinlichkeit, dass zwei benachbarte Symbole verwechselt werden, dominiert die Gesamtfehlerrate (s. [Kam04])

→ Euklidische Distanz zwischen benachbarten Symbolen Δ_0 ist ausschlaggebend (je größer Δ_0 , desto geringer die Fehlerrate)

- Laut Bild 2.2 nimmt Δ_0 mit wachsender Stufigkeit des Modulationsverfahrens ab
- Für PSK-Modulation gilt allgemein:

$$\Delta_0 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \cdot \sqrt{E_s/T_s} \quad (2.4)$$

⇒ **Mit steigender spektraler Effizienz wächst gleichzeitig auch die Fehlerhäufigkeit!**

M-PSK

Im folgenden betrachten wir zunächst die digitale Phasenmodulation. Zur Berechnung der Auftrittswahrscheinlichkeit eines Fehlers nehmen wir Bild 2.3 zur Hilfe. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit betrachten wir die beiden Symbole (000) und (100) einer 8-PSK mit der euklidische Distanz Δ_0 . Wird das Symbol (100) gesendet, tritt genau dann ein Fehler auf, wenn der Imaginärteil n_i'' des Rauschens größer als $\Delta_0/2$ ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist vom Signal-Rausch-Abstand E_s/N_0 bzw. E_b/N_0 abhängig und lautet

$$\begin{aligned} P\left(n_i'' > \frac{\Delta_0}{2}\right) &= P\left(n_i'' > \sqrt{E_s/T_s} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \cdot \sin(\pi/M)\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{m \frac{E_b}{N_0}} \cdot \sin(\pi/M)\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es ist zu beachten, dass pro Symbol m Informationsbit übertragen werden, weshalb der Zusammenhang $E_b = E_s/m$ gilt. Da jedes Symbol zwei Nachbarn hat, mit denen es verwechselt werden kann, führt auch $n_i'' < -\Delta_0/2$ zu einer fehlerhaften Entscheidung. Aufgrund der geltenden Symmetrie lässt sich daher die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit folgendermaßen abschätzen:

$$P_s \approx 2 \cdot P\left(n_i'' > \frac{\Delta_0}{2}\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \cdot \sin(\pi/M)\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{m \frac{E_b}{N_0}} \cdot \sin(\pi/M)\right). \quad (2.6)$$

M-QAM

Für eine M -QAM-Modulation kann eine ähnliche Vorgehensweise wie bei der M -PSK verwendet werden. Da Real- und Imaginärteil des Rauschens als auch des QAM-Signals voneinander unabhängig sind, können die beiden Dimensionen getrennt voneinander betrachtet werden. Aufgrund der hier angenommenen symmetrischen Signalmuster besitzen die sich ergebenden \sqrt{M} -ASK-Dimensionen die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit. Ein Unterschied zur PSK ist allerdings, dass die Symbole nun unterschiedliche Energien besitzen. Daher wird zunächst die mittlere Symbolenergie einer \sqrt{M} -ASK berechnet. Es gilt (Potenzreihenentwicklung)

$$\overline{E_s}/T_s = \frac{2}{\sqrt{M}} \cdot \sum_{i=1}^{\sqrt{M}/2} [(2i-1)a]^2 = \frac{2a^2}{\sqrt{M}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{M}}{2}(4\frac{M}{4}-1)}{3} = a^2 \frac{M-1}{3}. \quad (2.7)$$

Zu einer Fehlentscheidung kommt es wiederum genau dann, wenn der Rauschwert die halbe Mindestdistanz überschreitet. Dieser Fall tritt mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(n'_i > \Delta_0/2 = a) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{N_0/T_s}}\right). \quad (2.8)$$

Bei der Berechnung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit ist jetzt noch die Tatsache zu berücksichtigen, dass jedes Symbol 2 direkte Nachbarn hat, die beiden äußeren Symbole ausgenommen. Trägt man dieser Besonderheit durch Einführen eines Mittelungsfaktor $\frac{2\sqrt{M}-2}{\sqrt{M}}$ Rechnung, so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (2.7)

$$P_s^{\sqrt{M}\text{-ASK}} \approx \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\overline{E_s}}{N_0} \cdot \frac{3}{M-1}}\right) = \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{m \frac{\overline{E_b}}{N_0} \cdot \frac{3}{M-1}}\right). \quad (2.9)$$

Die Symbolfehlerrate für die M -QAM berechnet sich letztendlich aus der Überlegung, dass ein Symbol nur dann korrekt empfangen wurde, wenn sowohl Real- als auch Imaginärteil gleichzeitig korrekt sind. Die Auftretenswahrscheinlichkeit für diesen Fall ergänzt sich mit der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit zu Eins und wir erhalten

$$P_s^{M\text{-QAM}} = 1 - (1 - P_s^{\sqrt{M}\text{-ASK}})^2 = 2P_s^{\sqrt{M}\text{-ASK}} - (P_s^{\sqrt{M}\text{-ASK}})^2. \quad (2.10)$$

Die Bitfehlerrate, d.h. die relative Häufigkeit falscher Informationsbit kann einfach abgeschätzt werden, wenn eine Gray-Codierung vorausgesetzt wird. Dann führt nämlich die Detektion eines benachbarten (falschen) Symbols zu genau einem falschen Informationsbit und es gilt

$$P_b \approx \frac{1}{m} \cdot P_s \quad (2.11)$$

Aus den Bildern 2.5 und 2.6 ist ersichtlich, dass mit zunehmender Stufigkeit der Modulationsverfahren auch die Fehleranfälligkeit ansteigt. Dies bedeutet, dass spektrale Effizienz und Leistungsfähigkeit miteinander konkurrieren und ein entsprechender Kompromiß gefunden werden muss! Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die 16-QAM nur unwesentlich schlechter ist als die 8-PSK, obwohl ihre spektrale Effizienz größer ist als die der 8-PSK. Dies liegt an der besseren Anordnung der Symbole im Signalraum, wodurch die zur Verfügung stehende Fläche effizienter genutzt wird und somit im Mittel die Distanz zwischen benachbarten Symbolen größer ist.

Es ist zu beachten, dass der Signal-Rausch-Abstand in Bild 2.6 auf die Energie pro Informationsbit E_b/N_0 bezogen ist. Die verschiedenen Modulationsverfahren besitzen unterschiedliche spektrale Effizienzen, so z.B. die QPSK $\eta = 2$ Bit/s/Hz, die 8-PSK $\eta = 3$ Bit/s/Hz und 16-PSK sowie 16-QAM $\eta = 4$ Bit/s/Hz. Für eine konstante Symbolenergie E_s würde dies bedeuten, dass pro Informationsbit mit zunehmender Stufigkeit des Modulationsverfahrens immer weniger Energie übertragen wird. So besitzt bei der QPSK jedes Informationsbit die Energie $E_b = E_s/2$, bei der 16-PSK dagegen nur noch $E_b = E_s/4$. Dafür benötigt die 16-PSK gegenüber der QPSK aber auch nur ein Viertel der Bandbreite. Um den Vergleich fairer zu gestalten, wird daher häufig nicht über die Symbolenergie E_s aufgetragen, sondern über die Energie je Informationsbit aufgetragen.

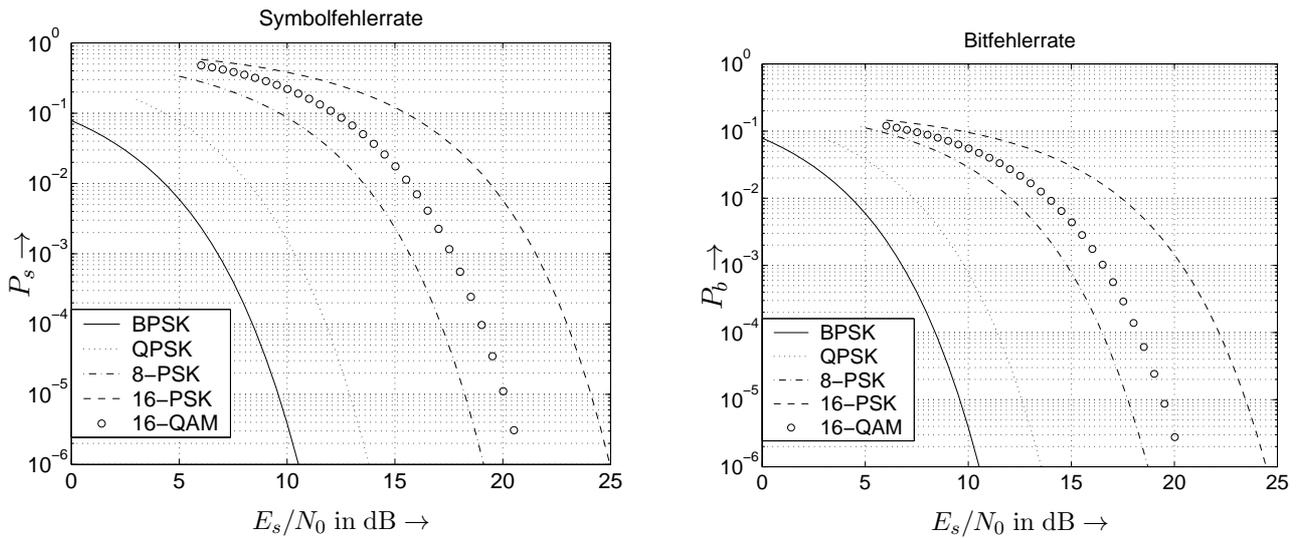


Bild 2.5: Symbol- und Bitfehlerraten für verschiedene Modulationsverfahren über E_s/N_0

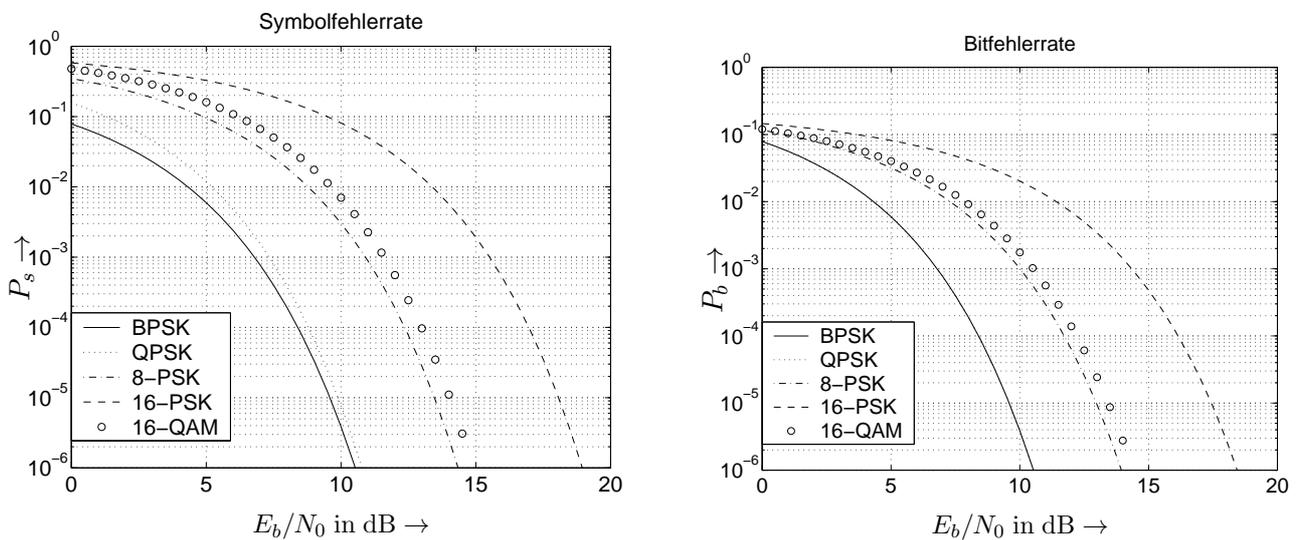


Bild 2.6: Symbol- und Bitfehlerraten für verschiedene Modulationsverfahren über E_b/N_0

2.3 Prinzip der codierten Modulation

2.3.1 Grundsätzliche Vorgehensweise

Das generelle Prinzip der codierten Modulation lässt sich nun einfach beschreiben. Man vervielfacht die Anzahl möglicher Sendesymbole beispielsweise von M auf $\tilde{M} > M$. Dies führt zu einer Erhöhung der Anzahl Binärstellen pro Kanalsymbol, d.h. statt m können nun \tilde{m} Bit je Symbol übertragen werden, ohne dass sich die Signalbandbreite erhöht. Die zusätzlichen $\tilde{m} - m$ Bit werden durch eine Kanalcodierung erzeugt! Diese prinzipielle Strategie soll im Folgenden an einem Beispiel veranschaulicht werden.

Beispiel:

Wir legen zunächst folgende Vereinbarung zugrunde. Die Informationsdatenrate sei r_b , die Datenrate der codierten Bit c sei r_c und die Symbolrate am Ausgang des Signalraumcodierers ist r_s .

1. Uncodierte QPSK-Übertragung

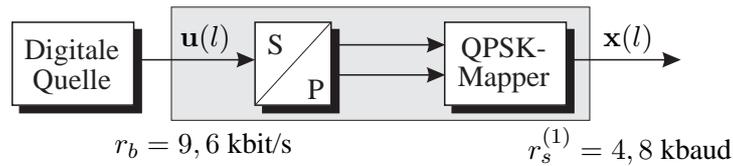


Bild 2.7: Darstellung der Raten bei QPSK-Modulation

- Die Rate des uncodierten binären Datenstroms beträgt $r_b = 9.600$ bit/s.
- Bei QPSK-Modulation werden pro Kanalsymbol 2 Bit übertragen
 \implies die Symbolrate beträgt im uncodierten Fall (s. Bild 2.7)

$$r_s^{(1)} = \frac{r_b}{m} = \frac{9.600}{2} = 4.800 \text{ Symbole/s} = 4.800 \text{ Baud}$$

2. Zusätzliche Kanalcodierung mit Coderate $R_c = 2/3$ erhöht die Datenrate um den Faktor $3/2$ (s. Bild 2.8)

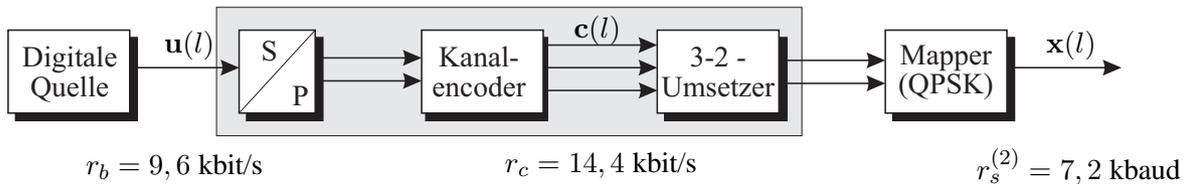


Bild 2.8: Darstellung der Raten bei Kanalcodierung und QPSK-Modulation

$$r_c = \frac{r_b}{R_c} = 14.400 \text{ bit/s}$$

$$r_s^{(2)} = \frac{r_c}{m} = 7.200 \text{ Baud} > r_s^{(1)}$$

3. Bei Verwendung einer 8-PSK-Modulation ($\tilde{m} = 3$) ergibt sich folgender Zusammenhang (s. Bild 2.9):

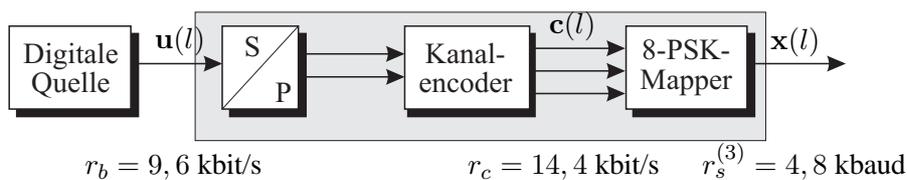


Bild 2.9: Darstellung der Raten bei Kanalcodierung und 8-PSK-Modulation

$$r_s^{(3)} = \frac{r_c}{\tilde{m}} = \frac{r_b}{R_c \cdot \tilde{m}} = \frac{9.600}{2/3 \cdot 3} = 4,8 \text{ kbaud} \stackrel{!}{=} r_s^{(1)}$$

d.h. es wird die gleiche Bandbreite wie im uncodierten Fall benötigt!

\longrightarrow **Durch Verwendung der 8-PSK wird Bandbreitenerhöhung der Kanalcodierung kompensiert!**
 Pro 8-PSK-Symbol werden 2 Informationsbit und 1 Prüfbit übertragen.

Aber: 8-PSK ist schlechter als QPSK!

Frage: Gibt es noch einen Codiergewinn und wie groß ist er?

2.3.2 Weg zur einheitlichen Betrachtung von Codierung und Modulation

Zur Beantwortung der obigen Frage betrachten wir zunächst Codierung und Modulation als getrennte Einheiten. Die Kanalcodierung erfolgt mit der Rate $R_c = m/(m + 1)$, bevor die Modulation $m + 1$ codierte Bit auf ein Kanalsymbol abbildet. Die spektrale Effizienz beträgt damit $\eta = m$ bit/s/Hz. Im Empfänger findet dann die Demodulation und getrennt von ihr die Decodierung statt.

Die Kanalcodierung muss also die größere Fehleranfälligkeit des mehrstufigen Modulationsverfahrens mehr als kompensieren, um insgesamt einen Gewinn zu erzielen!

Wir wollen uns das Ergebnis anhand eines einfachen Beispiels erläutern und betrachten einen Faltungscode mit Rate $R_c = 2/3$ und Einflußlänge $L_c = 7$, kombiniert mit der 8-PSK-Modulation.

- Übergang von QPSK auf 8-PSK führt nach Bild 2.5 im uncodierten Fall zu einem Verlust von $E_s/N_0 = 5,3$ dB (für E_b/N_0 reduziert sich der Verlust auf 3,6 dB)
- Codiergewinn bei obigen Faltungscode beträgt etwa 6 dB gegenüber dem uncodierten Fall (vgl. Ergebnisse aus Vorlesung Kanalcodierung I)

→ Die Bilanz ergibt nur einen kleinen Gewinn von etwa 0,7 dB

Es scheint also, dass diese 'triviale' Zuordnung von codierten Bit auf Kanalsymbole nicht die gewünschte Leistungsfähigkeit bieten kann! Dies steht im Gegensatz zur binären Übertragung, wo die Art der Zuordnung von codierten Bit auf die Kanalsymbole keinen Einfluß auf die Leistungsfähigkeit hatte.

Lösung: Die Struktur des Codes muss bei der Zuordnung auf die Kanalsymbole berücksichtigt werden (s. Bild 2.10)

⇒ Kanalcodierung und Modulation verschmelzen zu einer Einheit

⇒ **Codierte Modulation**

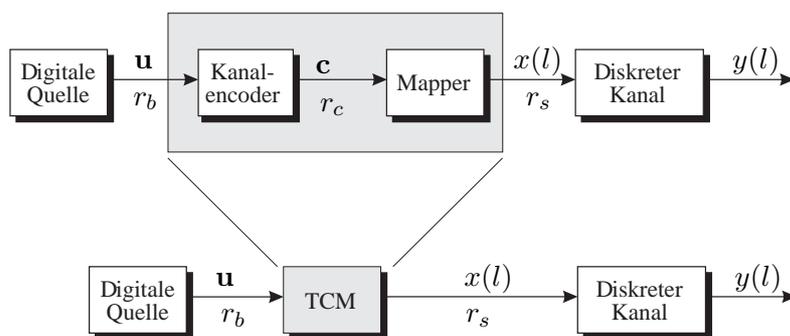


Bild 2.10: Zusammenfassen von Codierung und Modulation

Im Empfänger können dann Demodulation und Decodierung nicht mehr länger getrennt betrachtet werden. Der optimale Empfänger führt demnach eine *Maximum-Likelihood-Sequenzschätzung* durch, indem er diejenige Symbolfolge $\hat{\mathbf{x}} = (x_0 \cdots x_{N-1})$ der Länge N bestimmt, die zur empfangenen Sequenz $\mathbf{y} = (y_0 \cdots y_{N-1})$ die geringste quadratische euklidische Distanz besitzt.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2) \quad (2.12)$$

Ziel der Codierten Modulation muss es also sein, die Zuordnung von Codeworten auf die Kanalsymbole derart zu gestalten, dass die möglichen Sequenzen eine maximale euklidische Distanz untereinander aufweisen. Ferner

wird durch Gl. (2.12) deutlich, dass der Faltungscodierer ein Gedächtnis einbringt, so dass am Empfänger ganze Symbolfolgen betrachtet werden müssen.

Mit anderen Worten:

Die minimale quadratische euklidische Distanz

$$\Delta_f^2 = \min_{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}} d_e(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \min_{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\|^2 \quad (2.13)$$

zwischen zwei beliebigen Symbolfolgen $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$ muss maximiert werden.

Damit liegt ein anderes Optimierungsproblem vor als im Fall der reinen Kanalcodierung. Dort kam es darauf an, die minimale Hammingdistanz bzw. die freie Distanz, d.h. die kleinste Anzahl unterschiedlicher Symbole einer Sequenz zu maximieren. Lediglich für den binären Fall führen beide Ansätze zur identischen Ergebnissen, da hier die Anzahl unterschiedlicher Symbole direkt die euklidische Distanz bestimmt.

Anmerkung zu Schwundkanälen

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das obige Kriterium, die minimale euklidische Distanz zwischen den Sequenzen zu maximieren, nur für den AWGN-Kanal zu optimalen Ergebnissen führt. Bei Schwundkanälen, die im Bereich der Mobilfunkübertragung fast immer vorliegen, müssen andere Strategien gewählt werden.

Im folgenden Beispiel werden noch einmal Rice-, Rayleigh- und AWGN-Kanal gegenübergestellt. Ohne die einzelnen Optimierungsansätze herzuleiten, sollen sie an dieser Stelle kurz erläutert werden. Der Rice-Kanal

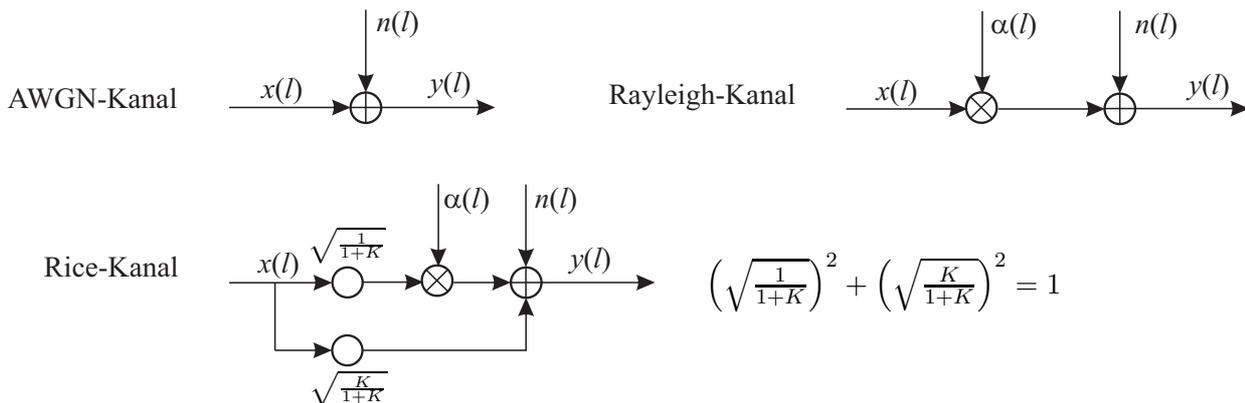


Bild 2.11: Darstellung einiger nicht-frequenzselektiver Kanalmodelle

stellt im Prinzip den allgemeinsten der drei aufgeführten Kanäle dar. Er berücksichtigt neben den schon vom Rayleigh-Kanal bekannten gestreuten Komponenten auch einen direkt ankommenden Signalanteil, wobei der Parameter K das Leistungsverhältnis zwischen direkter und gestreuten Komponenten angibt. Für den Extremfall $K = 0$ existiert keine direkte Komponente, wir erhalten den reinen Rayleigh-Kanal. Für $K \rightarrow \infty$ existiert dagegen nur eine direkte Komponente und wir erhalten den AWGN-Kanal.

Optimierungsstrategien:

- $K = 0$ Reiner Rayleigh-Kanal:
 - 1) Die Länge (Anzahl Symbole) der kürzesten Fehlersequenz muss maximiert werden.
 - 2) Das Produkt der Pfaddistanzen entlang dieses Pfades ist zu maximieren.
- $K > 0$ Rice-Kanal:

Die Reihenfolge der Kriterien 1) und 2) kehrt sich mit wachsendem K allmählich um.
- $K \rightarrow \infty$ AWGN-Kanal:

Kleinste euklidische Distanz ist zu maximieren.

Aufgrund der Komplexität der Thematik und der Vielzahl von verschiedenen Spezialfällen wird im weiteren Verlauf lediglich der AWGN-Kanal und die mit ihm verbundenen Optimierungen betrachtet.

2.3.3 Informationstheoretische Betrachtung

Um grundsätzlich zu klären, wie groß der theoretische Gewinn durch Vergrößerung des Signalraumalphabets werden kann, kann die Kanalkapazität herangezogen werden. In Kapitel 2 des letzten Semesters wurde die Gleichung zur Berechnung der Kanalkapazität C bei diskretem Eingangs-, aber kontinuierlichem Ausgangsalphabet (AWGN), berechnet:

$$C = 2^{-k} \cdot \int_{\mathcal{A}_{out}} \sum_{\nu} p_{y|x}(\vartheta|x = X_{\nu}) \cdot \log_2 \frac{p_{y|x}(\vartheta|x = X_{\nu})}{2^{-k} \cdot \sum_l p_{y|x}(\vartheta|x = X_l)} d\vartheta. \quad (2.14)$$

Basierend auf den Signalraumalphabeten der bisher betrachteten Modulationsverfahren liefert Gl. (2.14) für den AWGN-Kanal die in Bild 2.12 dargestellten Ergebnisse.

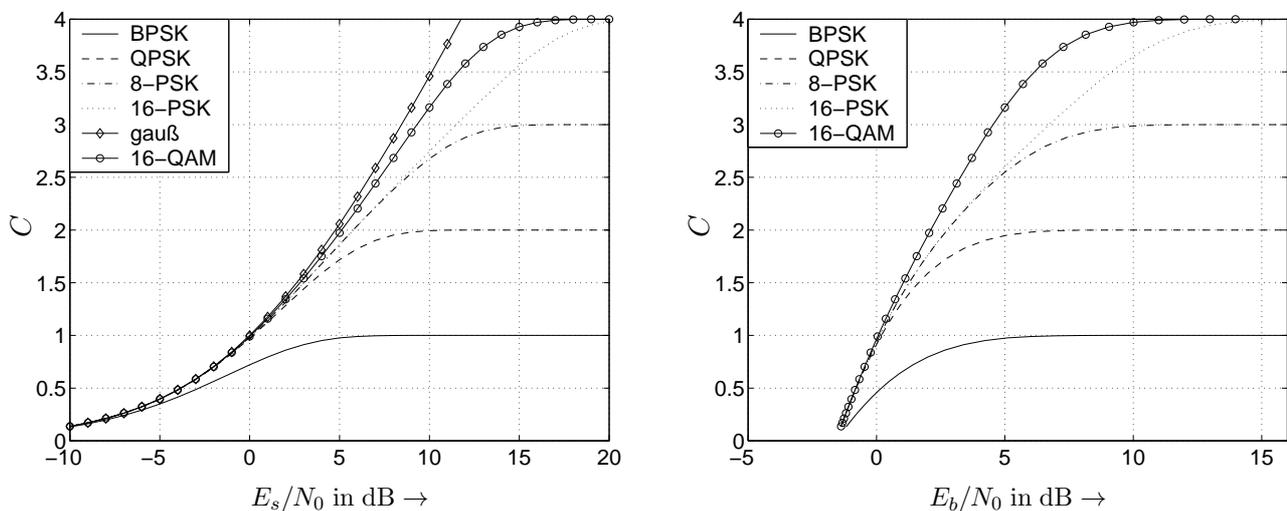


Bild 2.12: Kapazität für den AWGN-Kanal und verschiedene Modulationsverfahren

Interpretation:

- Darstellung über E_s/N_0 :
 - Mit wachsendem M nimmt auch Kanalkapazität zu
 - Für sinkenden Signal-Rausch-Abstand ($E_s/N_0 \rightarrow -\infty$) strebt die Kapazität gegen Null
 - Asymptotisch ($E_s/N_0 \rightarrow \infty$) strebt die Kanalkapazität gegen m , also die spektrale Effizienz
 - Kontinuierlich gaußverteilte Eingangssignale weisen die maximal mögliche Kapazität auf
 - 16-QAM besitzt größere Kapazität als 16-PSK (sie nutzt den Signalraum effizienter aus); asymptotisch erreichen natürlich beide die gleiche spektrale Effizienz $\eta = 4$ bit/s/Hz
- Darstellung über E_b/N_0 :
 - Bedingte Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ hängt von E_s/N_0 ab
 - Es gilt aber $C = f(E_s/N_0) = f(R_c \cdot E_b/N_0)$
 - Soll die Kanalkapazität voll ausgeschöpft werden, erhält man für $R_c = C$ eine implizite Gleichung, die Punkt für Punkt nach E_b/N_0 aufgelöst werden muss.
 - Absolute Grenze für fehlerfreie Übertragung aus letztem Semester noch bekannt:
 $E_b/N_0 \approx -1.59$ dB (unabhängig vom Modulationsverfahren)

- ⇒ Für $E_b/N_0 < -1,59$ dB ist auch mit noch so großem Aufwand keine fehlerfreie Übertragung mehr möglich!
- Qualitative Verhältnisse ändern sich im Vergleich zu (E_s/N_0) nicht.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass alle Modulationsverfahren für große Signal-Rausch-Abstände eine Kapazität erreichen, die ihrer spektralen Effizienz entspricht. Dies ist einleuchtend, da mit einer 8-PSK nie mehr als 3 Bit je Symbol übertragen werden können.

Im Folgenden soll nun der Übergang von einer uncodierten QPSK auf eine 2/3-ratig codierte 8-PSK untersucht werden. Mit Hilfe von Gl. (2.6) bzw. Bild 2.6 kann gezeigt werden, dass für die uncodierte QPSK ein Signal-Rausch-Abstand von ca. 9,5 dB erforderlich ist, um eine Bitfehlerrate von $P_b = 10^{-5}$ zu erreichen. Die spektrale Effizienz beträgt dabei $\eta = 2$ bit/s/Hz. Aus Bild 2.12 ist hingegen ersichtlich, dass eine fehlerfreie Übertragung mit $\eta = 2$ bit/s/Hz bei einer 8-PSK schon bei $E_b/N_0 = 2,5$ dB möglich ist. Demnach ist theoretisch ein Gewinn von etwa 7 dB möglich, wenn man von der uncodierten QPSK auf eine 2/3-ratig codierte 8-PSK übergeht. Der direkte Ansatz zur codierten Modulation erreichte nur einen Gewinn von 0,7 dB und kann demnach als sehr schlecht angesehen werden. Codierer und Modulator müssen vielmehr zu einer Einheit verschmelzen, um die euklidischen Distanzen der möglichen Symbolfolgen zu optimieren.

Außerdem ersichtlich:

Eine stärkere Vergrößerung des Signalraumalphabets als eine Verdopplung bringt keinen zusätzlichen Gewinn mehr

⇒ **Verdopplung von M auf $2M$ bzw. von m auf $m + 1$ reicht aus!**

⇒ **Codes der Raten $R_c = m/m + 1$ kommen zum Einsatz!**

2.4 TCM nach Ungerböck

2.4.1 Trellisrepräsentation

Wie aus dem Namen der Trelliscodierten Modulation schon hervorgeht, lässt sich dieser Ansatz zur codierten Modulation mit Hilfe eines Trellisdiagramms graphisch darstellen. Dies entspricht auch der Beschreibung von Faltungscodes, die in den meisten Fällen auch als Kanalcodierungsverfahren eingesetzt werden. Kommen Blockcodes zum Einsatz, spricht man von *Blockcodierter Modulation*.

Im Folgenden soll der Vorteil der Verknüpfung von Codierung und Modulation anhand einiger Beispiele veranschaulicht werden. Dazu betrachten wir das schon öfters verwendete Beispiel der uncodierten QPSK und der 2/3-ratig codierten 8-PSK. Als Maß des Gewinns dient das Verhältnis der minimalen quadratischen euklidischen Distanzen des Sequenzen

$$\gamma = \frac{\Delta_f^2(8\text{-PSK-TCM})}{\Delta_f^2(\text{QPSK})}, \quad (2.15)$$

da diese im wesentlichen die Leistungsfähigkeit beeinflussen (s. Abschnitt 2.2).

Beispiel: Uncodierte QPSK im Vergleich zu 2/3-ratig codierter 8-PSK

- Bei der uncodierten QPSK werden 2 Informationsbit je Symbol übertragen ($\eta = 2$ bit/s/Hz).
- Gleiche spektrale Effizienz bei 8-PSK bedingt 2 Infobit und 1 Prüfbit je 8-PSK-Symbol (Codierung mit $R_c = 2/3$)
- **Die Symbolenergie ist in allen Fällen auf 1 normiert ($E_s = T_s$).**

Uncodierte QPSK

Bei einer uncodierten Übertragung sind aufeinanderfolgende Symbole statistisch unabhängig voneinander, d.h. alle Symbolabfolgen sind innerhalb einer Sequenz möglich. Diese Struktur kann entsprechend Bild 2.13 durch ein Trellisdiagramm mit nur einem Zustand (Gedächtnis Null) dargestellt werden. Die minimale quadratische euklidische Distanz zwischen zwei Sequenzen ist somit durch die minimale quadratische euklidische Distanz zwischen zwei Symbolen bestimmt.

$$\Delta_f^2 = \min_{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}} d_e^2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = \Delta_0^2 = 2$$

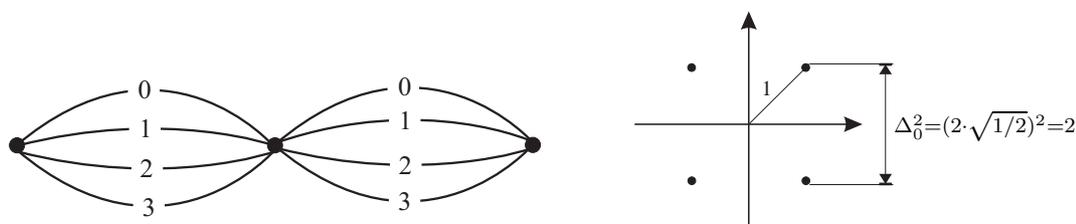


Bild 2.13: Trellisdiagramm mit 1 Zustand

Codierte 8-PSK mit 2 Zuständen

Durch die Vergrößerung des Gedächtnisses auf Eins ergibt sich ein Trellisdiagramm mit zwei Zuständen (s. Bild 2.14), wobei mögliche Symbolfolgen durch Pfade im Trellis dargestellt werden. Die Symbole der 8-PSK seien entgegen dem Uhrzeigersinn fortlaufend numeriert! Durch die Codierung sind nun nicht mehr alle Symbolfolgen möglich, so dass sich die euklidische Distanz zwischen den Sequenzen erhöht. Da 2 Informationsbit je Symbol übertragen werden, gibt es vier Übergänge von und zu jedem Zustand. Bei 2 Zuständen treten damit auch parallele Übergänge auf, weshalb die kürzeste Abweichung zwischen 2 Sequenzen aus 2 parallelen Zweigen besteht.

Intuition: Euklidische Distanz zwischen parallelen Zweigen muss maximiert werden!

Aus diesem Grund werden parallelen Übergängen gegenüberliegende Symbole ($\Delta_3^2 = 4$) zugeordnet. Zur Bestimmung der minimalen euklidischen Distanz zweier Symbolfolgen sind in Bild 2.14 für parallele und nicht-parallele Pfade die Sequenzen mit der geringsten euklidischen Distanz zueinander fett hervorgehoben.

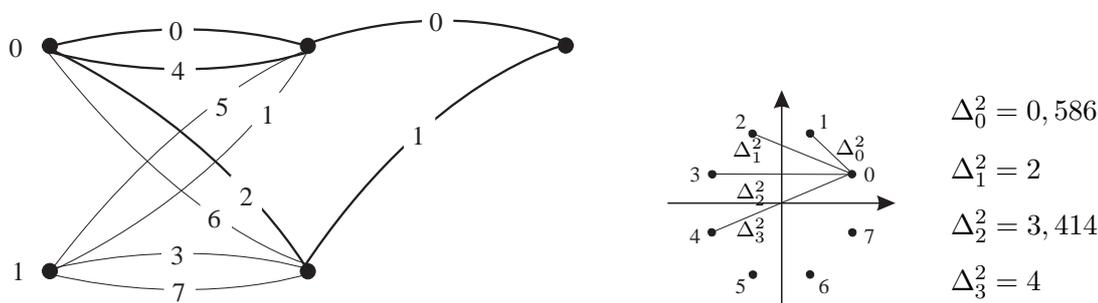


Bild 2.14: Trellisdiagramm mit 2 Zuständen

- Parallele Zweige: $d_{ep}^2 = \Delta_3^2 = 4$
- Zustandsfolge 0-1-0: $d_{ef}^2 = d_e^2(0, 2) + d_e^2(0, 1) = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 = 2 + 0,586 = 2,586$

Ausschlaggebend ist das Minimum der beiden Distanzen. Der Gewinn gegenüber der uncodierten QPSK beträgt

$$\gamma = \frac{\Delta_f^2}{\Delta_0^2} = \frac{\min(d_{ep}^2, d_{ef}^2)}{\Delta_0^2} = \frac{2,586}{2} = 1,293 \hat{=} 1,12 \text{ dB} .$$

Der Gewinn von 1,12 dB ist noch weit vom optimalen informationstheoretischen Wert (7 dB) entfernt. Eine weitere Verbesserung kann durch die Erhöhung der Anzahl an Zuständen im Trellisdiagramm erreicht werden

Codierte 8-PSK mit 4 Zuständen

Bild 2.15 zeigt die Darstellung durch das Trellisdiagramm. Zur Berechnung der quadratischen euklidischen Distanzen sind wiederum parallele und nicht-parallele Sequenzen zu unterscheiden.

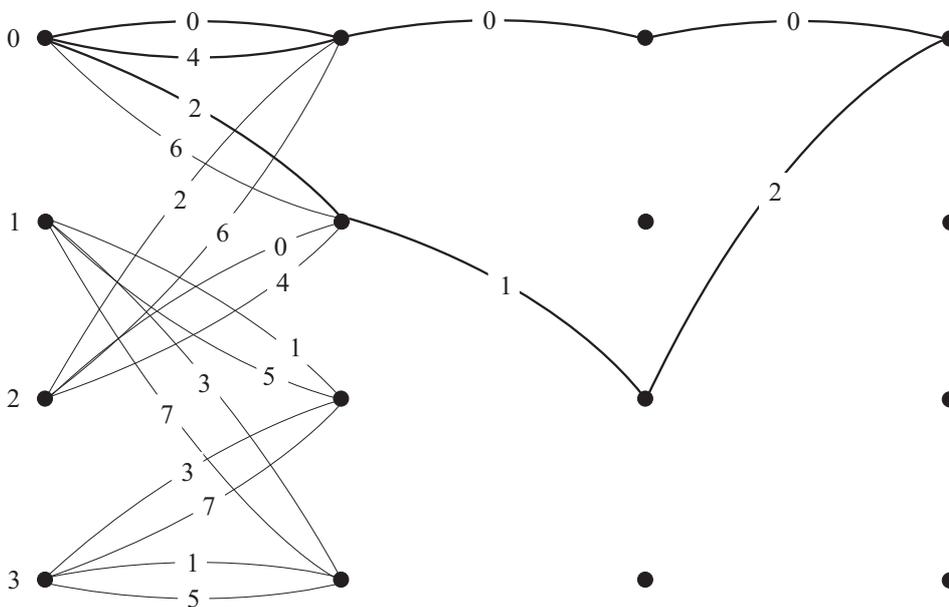


Bild 2.15: Trellisdiagramm mit 4 Zuständen

- Parallele Übergänge: $d_{ep}^2 = \Delta_3^2 = 4$
- Zustandsfolge 0 - 1 - 2 - 0:

$$d_{ef}^2 = d_e^2(0, 2) + d_e^2(0, 1) + d_e^2(0, 2) = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \Delta_1^2 = 2 + 0,586 + 2 = 4,586$$

Der Gewinn gegenüber der uncodierten QPSK beträgt somit

$$\gamma = \frac{\min(d_{ep}^2, d_{ef}^2)}{\Delta_0^2} = \frac{4}{2} = 2 \hat{=} 3 \text{ dB} .$$

Der Gewinn ist jetzt durch die euklidische Distanz paralleler Übergänge bestimmt, da sie die minimal mögliche Distanz zwischen zwei Symbolfolgen festlegen. Daher müssen für weitere Verbesserungen parallele Zweige vermieden werden, was z.B. durch eine Erhöhung der Anzahl von Zuständen oder ein anderes Modulationsverfahren geschehen kann.

Codierte 8-PSK mit 8 Zuständen

Bild 2.16 zeigt das Trellisdiagramm für ein Gedächtnis von drei. Das erste Symbol an jedem Knoten gehört zum obersten Pfad, das zweite zum zweit obersten usw. Es werden folgende Distanzen für parallele und nicht-parallele Sequenzen erzielt.

- Parallele Übergänge existieren nicht mehr
- Zustandsfolge 0 - 1 - 2 - 0:

$$d_{ef}^2 = d_e^2(0, 6) + d_e^2(0, 7) + d_e^2(0, 6) = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \Delta_1^2 = 2 + 0,586 + 2 = 4,586$$

Damit beträgt der Gewinn gegenüber der uncodierten QPSK

$$\gamma = \frac{d_{ef}^2}{\Delta_0^2} = \frac{4,586}{2} = 2,293 \hat{=} 3,6 \text{ dB}$$

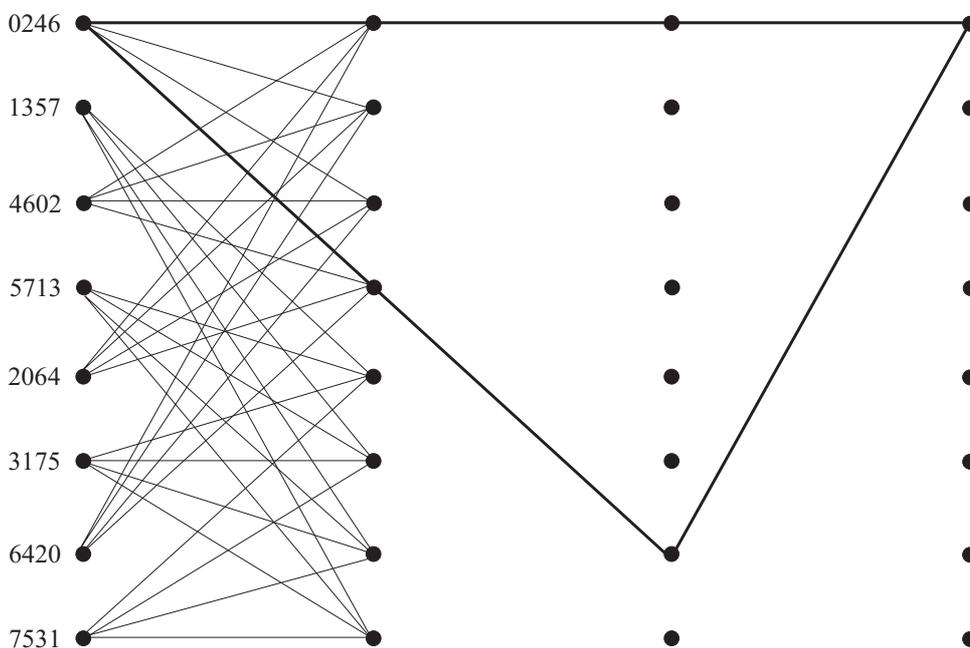


Bild 2.16: Trellisdiagramm mit 8 Zuständen

Aus den vorangegangenen Beispielen ist ersichtlich, dass sich das Einbringen eines Gedächtnisses gewinnbringend auswirkt. Es können nicht mehr alle Symbolkombinationen in einer Sequenz auftreten, wodurch sich die Distanzen zwischen den gültigen Symbolfolgen erhöhen, was schließlich in einem Gewinn gegenüber dem uncodierten Fall resultiert. Wie auch bei den Faltungscodes führt eine Erhöhung der Anzahl der Zustände zu einer Vergrößerung der Leistungsfähigkeit, natürlich auch verbunden mit einem höheren Decodieraufwand. Der betrachtete Gewinn stellt sich in der Praxis erst asymptotisch (für sehr große Signal-Rausch-Abstände) ein. Für genauere Abschätzungen ist wie auch bei Block- und Faltungscodes das gesamte Distanzspektrum zu betrachten.

Frage: Kann eine Systematik gefunden werden, mit der die Konstruktion von optimalen TCM-Codierern möglich ist?

Antwort: Nein!

Es sind (für den AWGN-Kanal) optimale Strukturen durch systematische Rechnersuche gefunden worden, nicht aber durch geeignete Kostruktionsvorschriften. Allerdings gibt es ein paar heuristisch motivierte Regeln, die bei der Suche helfen, aber keine Garantie für ein optimales Ergebnis gewähren.

2.4.2 Set-Partitioning nach Ungerböck

Ziel des *Mapping by Set-Partitioning* von Ungerböck ist es, die Distanzeigenschaften des TCM-Codes zu optimieren. Dabei müssen parallele Zweige (soweit vorhanden) mit weit auseinander liegenden Symbolen korrespondieren, wohingegen 'normale' Zweige, die zu unterschiedlichen Zuständen führen, durch die Trellisstruktur besser geschützt sind und dichter zusammen liegenden Symbolen zugeordnet werden können. Dies führt zur Strategie der sukzessiven Zerlegung des Signalraums in Teilmengen, wie es in Bild 2.17 dargestellt ist.

1. Beginne mit dem Gesamtsignalraum $\mathbf{B} = \mathcal{A}_{in}$
2. Teile \mathbf{B} in 2 Teilmengen $\mathbf{B}_0^{(1)}$ und $\mathbf{B}_1^{(1)}$, so dass sich die euklidischen Distanzen zwischen Symbolen innerhalb der Teilmengen vergrößern
3. Wiederhole die obige Zerlegung mit $\mathbf{B}_0^{(1)}$ und $\mathbf{B}_1^{(1)}$ und den aus ihnen gebildeten Teilmengen $\mathbf{B}_0^{(2)}, \mathbf{B}_1^{(2)}, \mathbf{B}_2^{(2)}$ und $\mathbf{B}_3^{(2)}$ solange, bis nur noch 1 Symbol je Mengen enthalten ist.

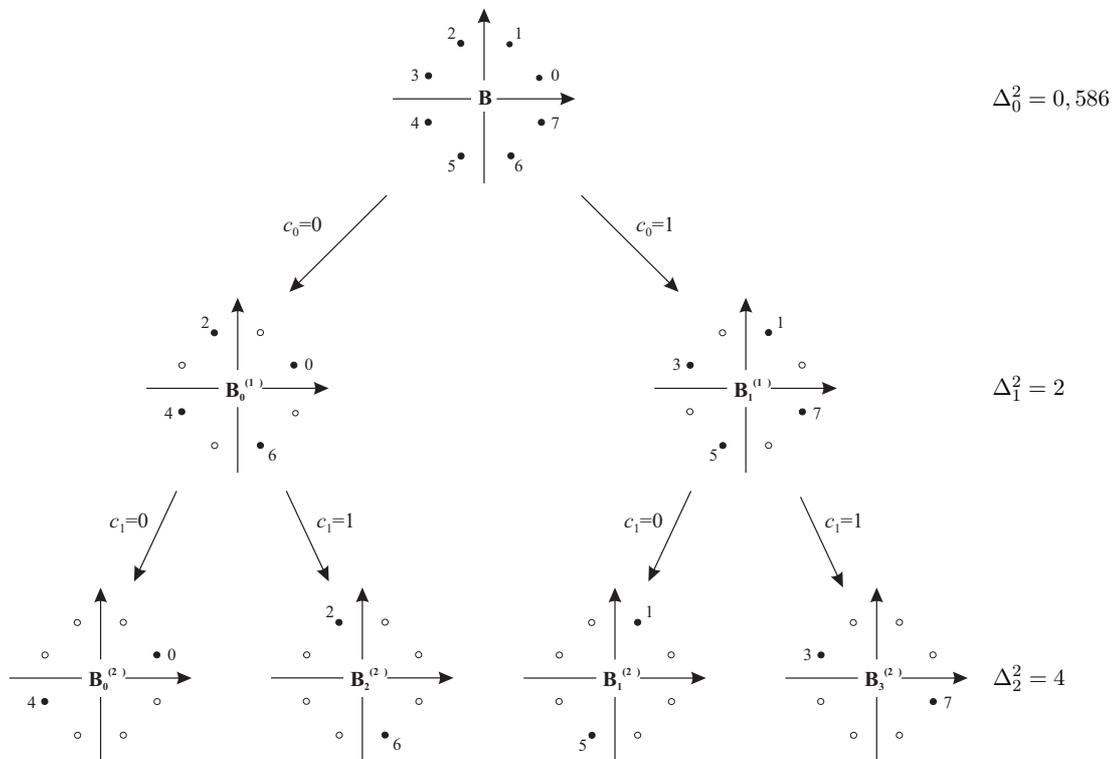


Bild 2.17: Set-Partitioning nach Ungerböck für 8-PSK

Mit jedem Partitionierungsschritt nimmt die kleinste quadratische euklidische Distanz innerhalb der Teilmengen zu, so dass sie von $\Delta_0^2 = 0,586$ über $\Delta_1^2 = 2$ auf $\Delta_2^2 = 4$ anwächst. Im allgemeinen werden $m' = m + 1$ Partitionierungsschritte ausgeführt, so dass die Mengen der untersten Partitionierungsebene nur noch 1 Element enthalten. In Bild 2.18 wird das Prinzip des *Set-Partitioning* auch für eine 16-QAM demonstriert.

Die Entscheidung, wie sich die Partitionierung auf die Symbolzuordnung für einen konkreten Vektor \mathbf{c} auswirkt, ist die nächste zu lösende Frage. Dabei ist festzuhalten, dass das Teilsystem bis zum Signalraumcodierer linear ist, während die Signalraumzuordnung nichtlinear ist. Es gilt

$$x(l) = f(\mathbf{c}(l)) = f(c_0(l) c_1(l) \cdots c_m(l)), \quad (2.16)$$

wobei $f()$ eine nichtlineare Funktion ist. Ein allgemeiner gefaßter Ansatz von Calderbank und Mazo beschäftigt sich intensiv mit Eigenschaften der Zuordnungsfunktion $f()$ [BDMS91].

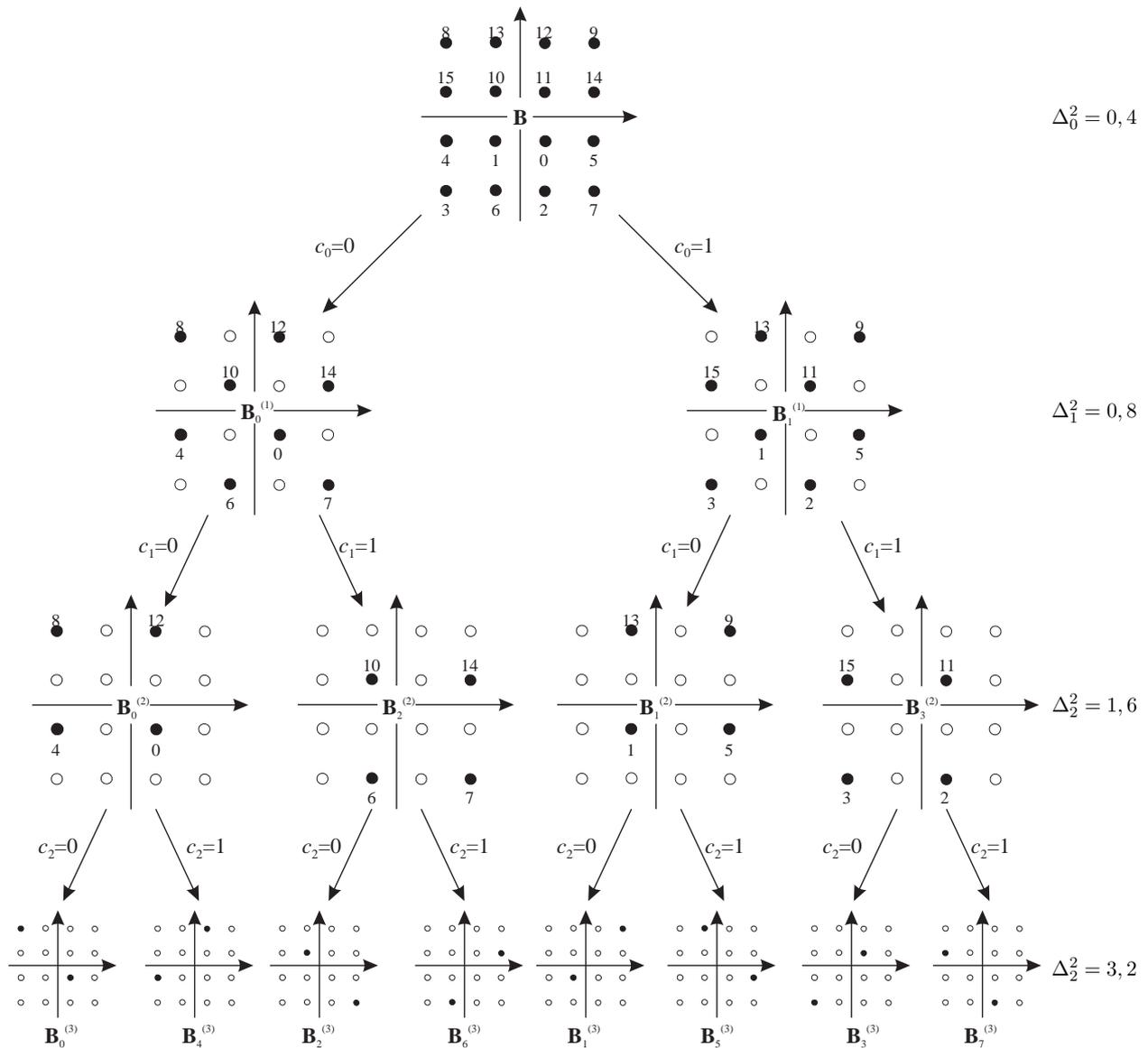


Bild 2.18: Set-Partitioning nach Ungerböck für 16-QAM

Natürliche Zuordnung

Unter der *natürlichen* Zuordnung versteht man die Interpretation des Vektors \mathbf{c} als umgekehrte Dualzahl $(c_m \dots c_0) \rightarrow c_m \cdot 2^m + \dots + c_0$, die Symbole werden dann einfach durchnummeriert (s. Bild 2.17). So entspricht das Symbol '1' der (0 0 1), das Symbol '3' der (0 1 1) sowie die '6' der (1 1 0). Die Durchnummerierung der Symbole in den einzelnen Teilmengen beeinflusst dabei nicht die Leistungsfähigkeit der TCM, da die Distanzeigenschaften der Sequenzen erhalten bleiben. Es wird hierdurch lediglich eine andere Zuordnung der Informationssequenz auf die Kanalsymbolfolge realisiert.

2.4.3 Struktur des TCM-Codierers

Aus der informationstheoretischen Betrachtung ist noch bekannt, dass eine Verdopplung des Signalraumalphabets ($m \rightarrow m + 1$) ausreicht und eine weitere Vergrößerung keinen nennenswerten Gewinn mehr ergibt. Somit sind lediglich Codierer der Rate $R_c = k/k + 1$ zu betrachten. Allgemein ergibt sich nach Ungerböck folgenden Struktur des TCM-Codierers (Bild 2.19).

- Beim TCM-Codierer liegen m Informationsbit am Eingang an, von denen k Bit $(u_1 \dots u_k)$ durch

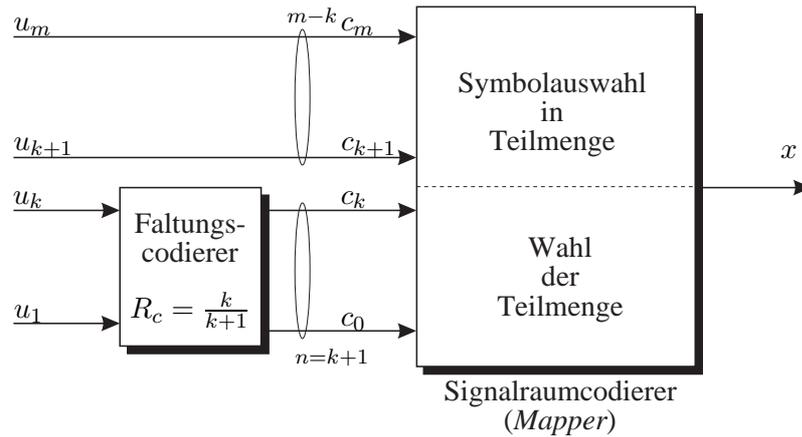


Bild 2.19: Allgemeiner Aufbau eines TCM-Codierers

Faltungscodierer mit $R_c = k/k + 1$ codiert werden

- Die restlichen $m - k$ Bit bleiben uncodiert ($u_{k+1} = c_{k+1}, \dots, u_m = c_m$)
- Zusammen mit den $k + 1$ codierten Werte ($c_0 \dots c_k$) liegen insgesamt $m + 1$ Bit am Eingang des Signalraumcodierers an
- Die Gesamtrate beträgt $m/m + 1$
- Spezialfälle:
 - $k = m$ Alle Informationsbit werden codiert \rightarrow Faltungscodierer mit $R_c = m/(m + 1)$
 - $k = 1$ Faltungscodierer der Rate $R_c = 1/2$ codiert nur 1 Informationsbit, die restlichen $m - 1$ Bit bleiben uncodiert

Für den AWGN-Kanal muss das Ziel aller Optimierungen sein, die minimale quadratische euklidische Distanz zu maximieren. Die Frage nach einer optimalen Struktur betrifft 2 Bereiche, die nur gemeinsam optimiert werden können. Zum Einen sind die zum Einsatz kommenden Faltungscodes an das neue Kriterium anzupassen. Die im letzten Semester vorgestellten Codes waren hinsichtlich ihrer freien Distanz d_f optimiert worden, hier gelten andere Randbedingungen, so dass die dort aufgeführten Codes hier nicht unbedingt die beste Wahl darstellen.

Der zweite Aspekt betrifft den Signalraumcodierer. Hier stellt sich die Frage, wie die 2^{m+1} verschiedenen Vektoren $\mathbf{c} = (c_0 \dots c_m)$ auf die Symbole x_l abgebildet werden sollen. Soll die euklidische Distanz zwischen Sequenzen im Trellis maximiert werden, ist bei der Wahl einer konkreten Zuordnungsvorschrift auch die Struktur des Faltungscodes zu berücksichtigen.

An dieser Stelle soll jedoch nicht auf effiziente Suchalgorithmen eingegangen werden. Sie können in der Literatur [Ung82, Ung87] nachgelesen werden. Bei der Suche nach einer optimalen Zuordnungsvorschrift sind die folgenden heuristisch motivierten Richtlinien hilfreich:

1. Uncodierte Binärstellen ($u_{k+1} \dots u_m$) bestimmen Symbole aus den $m - k$ untersten Partitionierungsmengen \rightarrow Symbole sind hier am weitesten voneinander entfernt
2. Zweige, die im gleichen Zustand entspringen oder in den gleichen Zustand münden, werden Symbolen der gleichen Teilmenge zugeordnet
3. Alle Symbole des Signalraums werden gleich häufig benutzt.

Die Berücksichtigung dieser Regeln führt zwar nicht zu einer eindeutigen Lösung, sie liefern jedoch wichtige Anhaltspunkte auf dem Weg zu einer optimalen Struktur. Hierdurch schränkt sich die Anzahl möglicher Konfigurationen schon merklich ein, was die Suche vereinfacht. Der erste Punkt gewährleistet, dass uncodierte Bit den größtmöglichen Schutz erhalten, da sie Symbolen mit größtmöglichem euklidischen Abstand zugeordnet werden.

2.4.4 Optimale Codes nach Ungerböck

Aus dem letzten Semester ist bereits bekannt:

- RSC-Codes: Systematische und rekursive Faltungscodes
- NSC-Codes: Nicht-systematische und nicht-rekursive Faltungscodes

Beide Codearten besitzen identische Distanzeigenschaften und lassen sich ineinander überführen. Ein prinzipieller Unterschied besteht zum einen darin, dass RSC-Codes eine unendlich lange Impulsantwort besitzen, während sie bei NSC-Codes endlich ist. Außerdem können die Informationsbit bei RSC-Codes im fehlerfreien Fall direkt - ohne Decodierung - aus der empfangenen Sequenz abgelesen werden, dies ist bei NSC-Codes nicht möglich.

Aufgrund der Äquivalenz beider Codes können sie natürlich auch gleichwertig in ein TCM-Schema nach Bild 2.19 eingesetzt werden. In der Regel erhalten jedoch die rekursiven systematischen Codes den Vorzug. Eine allgemeine Form zeigt dann Bild 2.20.

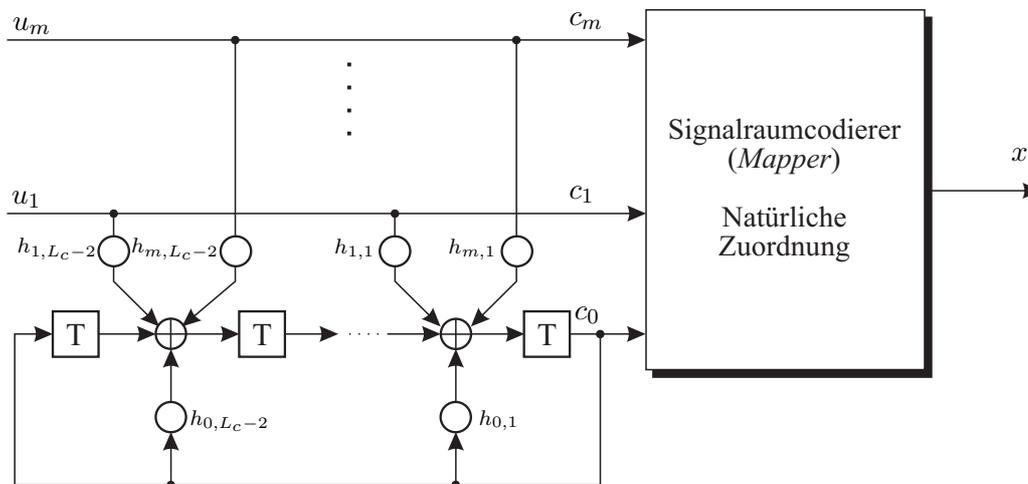


Bild 2.20: Allgemeiner Aufbau eines systematischen TCM-Codierers mit RSC-Code

Wie schon erläutert liegen m Informationsbit ($u_1 \dots u_m$) am Eingang an, die dann über Generatorkoeffizienten $h_{i,j}$ mit den modulo-2-Addierern des Faltungscodes verbunden werden. Die Struktur des Faltungscodes ist zunächst etwas ungewöhnlich, da die Addierer zwischen den Speicherelementen angeordnet sind. Sie erinnert aber an die Realisierung der Schieberegisterstruktur von Blockcodes mit Hilfe des Generatorpolynoms (im Gegensatz zur Realisierung über das Prüfpolynom).

Sollen $m - k$ Bit ($u_{k+1} \dots u_m$) uncodiert bleiben, d.h. nicht den Ausgang des Faltungscodes beeinflussen, sind die entsprechenden Koeffizienten $h_{k+1,i}$ bis $h_{m,i}$ für alle $i = 1 \dots L_c - 2$ zu Null zu setzen. Durch die Wahl eines RSC-Codes liegen alle Informationsbit direkt am Signalraumcodierer an, mit Hilfe der rekursiven Struktur wird das zusätzliche Prüfbit erzeugt. Die konkrete Wahl der Koeffizienten $h_{i,j}$ ist kein triviales Problem und lässt sich nur mit Hilfe aufwendiger Suchalgorithmen lösen, die als Optimierungskriterium die schon erwähnten Distanzbetrachtungen besitzen. Eine Auflistung der wichtigsten von Ungerböck gefundenen

Konfigurationen, die optimale TCM-Strukturen für den AWGN-Kanal darstellen, enthalten die folgenden der Literatur entnommen Tabellen.

Tabellen mit den wichtigsten optimalen Ungerböck-TCM-Codes für verschiedene Modulationsverfahren

Anhand der Tabellen 2.1 und 2.2 ist zu erkennen, dass mit zunehmender Anzahl von Zuständen (Registerlänge) die euklidische Distanz zwischen möglichen Symbolfolgen zunimmt. Generell lassen sich Unterschiede zwischen 8-PSK und 16-PSK feststellen. Bei der 8-PSK ist die minimale euklidische Distanz für 4 Zustände noch durch die parallelen Übergänge bestimmt (*). Danach treten keine parallelen Übergänge mehr auf, die kleinste vorkommende euklidische Distanz ist jetzt größer als die gegenüberliegender Symbole ($\Delta_f^2 > 4$). Die 16-PSK verhält sich anders. Für kleine Registerlängen dominieren zunächst Sequenzen mit einer euklidischen Distanz, die kleiner ist als die paralleler Übergänge ist. Dies liegt an der dichten Anordnung der Symbole im Signalraum. Für 64 und 128 Zustände sind unterschiedliche Sequenzabschnitte dann so lang, dass ihre euklidische Distanz größer als die der parallelen Übergänge wird (*). Dann dominieren letztere mit $\Delta_f^2 = 2$ die Fehlerrate. Erst ab 256 Zuständen treten keine parallelen Übergänge mehr auf, die minimale Distanz wird größer als 2.

Anzahl Zustände	k				Δ_f^2	$G_{8-PSK/QPSK}$ [dB]	Gewinn bei $P_b = 10^{-5}$ [dB]
		h_0	h_1	h_2			
4	1	5	2		4,000*	3,01	2,4
8	2	11	02	04	4,586	3,60	2,8
16	2	23	04	16	5,172	4,13	3,0
32	2	45	16	34	5,758	4,59	3,3
64	2	103	030	066	6,343	5,01	3,6
128	2	277	054	122	6,586	5,17	
256	2	435	072	130	7,515	5,75	

Tabelle 2.1: TCM-Konfiguration für 8-PSK-TCM nach Ungerböck für verschiedene Anzahl von Zuständen [Fri96]

Anzahl Zustände	k				Δ_f^2	$G_{16-PSK/8-PSK}$ [dB]	Gewinn bei $P_b = 10^{-5}$ [dB]
		h_0	h_1	h_2			
4	1	5	2		1,324	3,54	2,3
8	1	13	04		1,476	4,01	2,7
16	1	23	04		1,628	4,44	2,9
32	1	45	10		1,910	5,13	3,2
64	1	103	024		2,000*	5,33	3,5
128	1	203	024		2,000*	5,33	
256	2	427	176	374	2,085	5,51	

Tabelle 2.2: TCM-Konfiguration für 16-PSK-TCM nach Ungerböck für verschiedene Anzahl von Zuständen [Fri96]

Im Folgenden sollen einige Beispiele die Struktur des TCM-Codierers veranschaulichen. Dabei verwenden wir die schon bekannten Beispiele aus den Bildern 2.14 bis 2.16 und zeigen die zugehörigen Codierer. Das Trellisdiagramm aus Bild 2.14 gehört beispielsweise zu der in Bild 2.21 gezeigten Codiererstruktur. Es wird deutlich, dass parallele Zweige immer gegenüberliegenden Symbolen (0,4) oder (2,6) zugeordnet werden. Welches der beiden Symbole gesendet wird, steuert das uncodierte Bit c_2 . Die Bit c_0 und c_1 bestimmen hingegen, welcher Teilmenge die beiden Symbole entnommen werden. So weisen alle von Zustand 0 ausgehenden Zweige gerade Symbolnummern auf, während den Pfaden von Zustand 1 die ungeraden Symbolnummern zugeordnet sind. Ausschlaggebend hierfür ist c_0 , dass in diesem einfachen Fall direkt den Zustand des Codierers angibt.

Die Bilder 2.22 und 2.23 zeigen die Strukturen für 4 bzw. 8 Zustände. In dieser systematischen Form kommen jetzt rekursive Codes zum Einsatz, es existieren allerdings äquivalente, rückkopplungsfreie Strukturen, bei de-

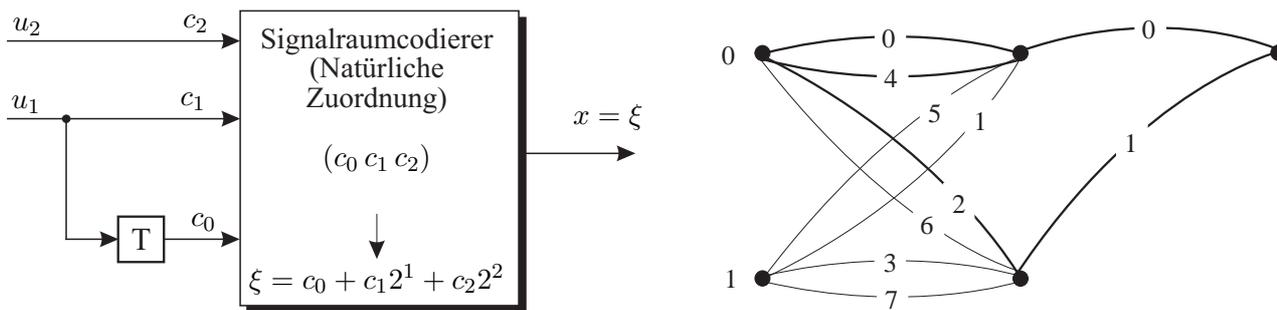


Bild 2.21: Optimaler TCM-Codierer für 8-PSK mit 2 Zuständen und Trellisdiagramm

nen der Vektor c die Informationsbit u nicht mehr explizit enthält. Man erkennt weiterhin, dass bei 4 Zuständen ein Informationsbit uncodiert bleibt (parallele Übergänge im Trellisdiagramm).

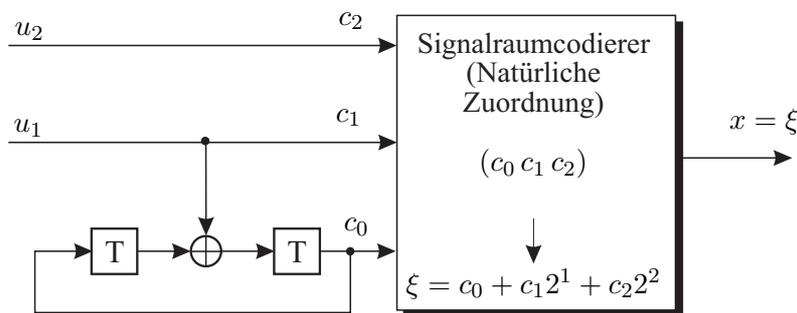


Bild 2.22: Optimaler TCM-Codierer für 8-PSK mit 4 Zuständen

Bei 8 Zuständen gibt es dann genügend mögliche Übergänge, dass keine parallelen Zweige mehr vorkommen. Hier sind entsprechend Bild 2.23 beide Informationsbit an der Codierung beteiligt, es gibt hier keine uncodierten Bit mehr.

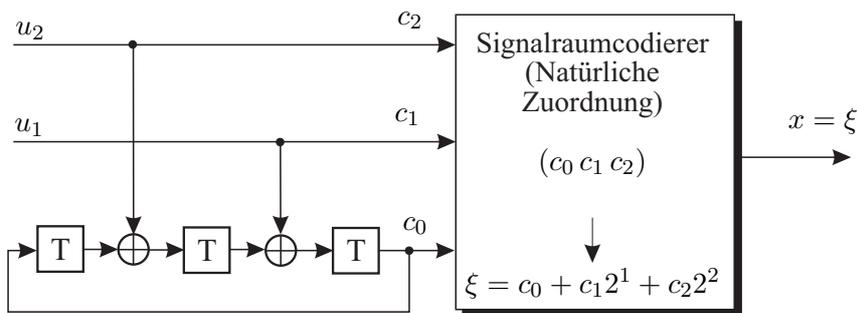


Bild 2.23: Optimaler TCM-Codierer für 8-PSK mit 8 Zuständen

2.5 ML-Decodierung mit dem Viterbi-Algorithmus

Das Prinzip der *Maximum Likelihood*-Decodierung ist schon von Block- und Faltungscodes bekannt. Es wird die Sequenz \hat{x} mit der minimalen euklidischen Distanz zur empfangenen Sequenz y gesucht. Daher ist das Bestreben bei der Optimierung der TCM auch, die minimale euklidische Distanz zwischen den Symbolfolgen zu maximieren und somit die Entscheidungssicherheit zu erhöhen.

Bei der TCM wird nun nicht zunächst die Demodulation und dann die Decodierung durchgeführt (s. direkter Ansatz zur Kombination von Codierung und Modulation). Aufgrund der Verschmelzung von Codierer und Modulator im Sender erfolgt auch im Empfänger eine gemeinsame Demodulation und Decodierung. Wir sprechen deshalb von *TCM-Decodierung*. Sie umfaßt auch die uncodierten Bit eines Symbols.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass unser diskretes Kanalmodell den analogen Teil des Demodulators beinhaltet und somit zeitdiskrete, aber wertekontinuierliche Signale liefert. Die quadratische euklidische Distanz ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \\ &= \sum_l (y(l) - x(l)) \cdot (y(l) - x(l))^* \\ &= \sum_l (|y(l)|^2 - x(l) \cdot y(l)^* - x(l)^* \cdot y(l) + |x(l)|^2) \\ &= \sum_l (|x(l)|^2 + |y(l)|^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}\{x(l)^* \cdot y(l)\}) . \end{aligned}$$

Die ML-Decodierung erfolgt nun nach

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \tag{2.17}$$

Werden PSK-Modulationsverfahren eingesetzt, ist die Symbolenergie $E_s = |x(l)|^2$ konstant. Dann trägt der Summand $|x(l)|^2$ wie schon bei der binären Modulation im letzten Semester nicht zur Unterscheidung verschiedener Symbolfolgen bei. Gleiches gilt für den Term $|y(l)|^2$. Die Vernachlässigung beider Terme führt dann zur Korrelationsmetrik

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_l \operatorname{Re}\{x(l)^* \cdot y(l)\} = \sum_l x'(l)y'(l) + x''(l)y''(l) .$$

Die ML-Decodierung liefert für die Korrelationsmetrik ein äquivalentes Ergebnis.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \tag{2.18}$$

Eine effiziente Realisierung der ML-Decodierung stellt wie schon bei den Faltungscodes der Viterbi-Algorithmus dar. Da sich TCM-Codes auch durch ein Trellisdiagramm beschreiben lassen, führt der TCM-Decodierer exakt die gleichen Operationen wie der Viterbi-Faltungsdecodierer aus. Der einzige Unterschied besteht in der Berechnung der Metriken, die für die TCM wie oben angegeben verwendet werden müssen.

Treten parallele Pfade zwischen Zuständen auf, so ist vorab jeweils der beste unter ihnen zu bestimmen. Nur dieser geht in die Metrikberechnung der Zustände ein, alle übrigen werden nicht weiter berücksichtigt. Diese Vorgehensweise wird auch dem *Set-Partitioning* nach Ungerböck gerecht, wonach parallelen Zweigen die uncodierten Bit zugeordnet werden, welche auch nicht mit der Trellisstruktur des Faltungscodes verknüpft sind.

2.6 Distanzeigenschaften und Abschätzung der Leistungsfähigkeit

Das Distanzspektrum von Faltungscodes ist schon aus dem letzten Semester bekannt. Zur Erinnerung sind noch einmal die drei wichtigsten Ausdrücke zur analytischen Bestimmung der Bitfehlerrate angegeben.

- Distanzspektrum

$$T(W, D, L) = \sum_w \sum_d \sum_l T_{w,d,l} \cdot W^w \cdot D^d \cdot L^l$$

- Schranke für die Bitfehlerrate (*Union Bound*)

$$P_b \leq \sum_d c_d \cdot P_d = \frac{1}{2} \cdot \sum_d c_d \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{d R_c \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

- Koeffizient c_d aus Distanzspektrum

$$c_d = \sum_w \sum_l w \cdot T_{w,d,l}$$

Ein wesentlicher Unterschied zur TCM besteht allerdings darin, dass **Faltungscodes linear** waren! Aufgrund der Abbildung des Vektors \mathbf{c} auf ein Symbol x ist die **TCM nichtlinear!** Hieraus folgt:

- Vergleich aller Sequenzen mit der Nullfolge ist nicht mehr ausreichend.
- Es müssen alle Sequenzen untereinander verglichen werden.
- Deutlich höherer Aufwand

Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeit bei ML-Decodierung mit *Union Bound*:

Die Herleitung der *Union Bound*-Abschätzung verläuft bei der TCM analog zu der bei den Faltungscodes. Wir treffen zunächst die Annahme, dass \mathbf{x} die gesendete Symbolfolge und \mathbf{x}' eine beliebige andere Sequenz repräsentieren. Ferner sei $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ die Menge aller Empfangssequenzen \mathbf{y} , die zu \mathbf{x} die geringste euklidische Distanz haben. Dann ist $\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ die zu $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ komplementäre Menge, d.h. $\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ enthält alle \mathbf{y} , die dichter an irgendeiner Sequenz \mathbf{x}' als an \mathbf{x} liegen.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit für \mathbf{x} lautet

$$\begin{aligned} P_e(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{y} \notin \mathcal{M}(\mathbf{x})) \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} | P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) > P(\mathbf{y}|\mathbf{x}'), \forall \mathbf{x}' \in \Gamma\} \\ &= P(\mathbf{y} \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x})) \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} | P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) < P(\mathbf{y}|\mathbf{x}'), \forall \mathbf{x}' \in \Gamma\} \\ &= P\left(\mathbf{y} \in \bigcup_{\mathbf{x}'} \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\right) \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \{\mathbf{y} | P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) < P(\mathbf{y}|\mathbf{x}')\} \\ &\leq \sum_{\mathbf{x}'} P(\mathbf{y} \in \bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) = \sum_{\mathbf{x}'} P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.19)$$

Das Gleichheitszeichen in Gl. (2.19) ist gültig, wenn die Mengen $\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ disjunkt sind, d.h. keine Sequenz \mathbf{y} in mehr als einer Menge $\bar{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ enthalten ist. Während bei den Faltungscodes die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$ immer auf die Nullfolge bezogen werden konnte, gilt dies wegen der Nichtlinearität der TCM nun nicht mehr. Folglich erhalten wir eine Fehlerwahrscheinlichkeit, die spezifisch für die betrachtete Sendefolge \mathbf{x} ist. Entsprechend der Funktionsweise des Viterbi-Algorithmus gilt mit $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') &= P(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 > \|\mathbf{y} - \mathbf{x}'\|^2) = P(\|\mathbf{n}\|^2 > \|\mathbf{x} + \mathbf{n} - \mathbf{x}'\|^2) \\ &= P(\mathbf{n}^H \mathbf{n} > (\mathbf{x} + \mathbf{n} - \mathbf{x}')^H (\mathbf{x} + \mathbf{n} - \mathbf{x}')) \\ &= P(\mathbf{n}^H \mathbf{n} > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^H \mathbf{n} + \mathbf{n}^H (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{n}^H \mathbf{n}) \\ &= P((\mathbf{x} - \mathbf{x}')^H \mathbf{n} + [(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^H \mathbf{n}]^* < -\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2) \\ &= P(2\operatorname{Re}\{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^H \mathbf{n}\} < -\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2) \\ &= P\left(\underbrace{\operatorname{Re}\{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^H \cdot \mathbf{n}\}}_Y < \underbrace{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}_X\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Mit der quadratischen Euclidischen Distanz

$$d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{E_s/T_s}, \quad (2.21)$$

ergibt sich für die mittelwertfreie Zufallsvariable Y in Gl. (2.20) ist die Varianz

$$\sigma_Y^2 = \frac{N_0}{T_s} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s N_0}{T_s^2}. \quad (2.22)$$

Der Term X ist konstant und gibt die quadratische euklidische Distanz zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}' an. Für Gl. (2.20) ergibt sich somit

$$P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{4N_0/T_s}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s/T_s}{4N_0/T_s}} \right). \quad (2.23)$$

Die Fehlerwahrscheinlichkeit für eine konkrete Symbolfolge \mathbf{x} lautet damit

$$P_e(\mathbf{x}) \leq \sum_{\mathbf{x}'} P(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathbf{x}'} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \right). \quad (2.24)$$

Es ist zu erkennen, dass nicht nur die Hamming-Distanz, also die Anzahl unterschiedlicher Symbole in \mathbf{x} und \mathbf{x}' eine Rolle spielt, sondern auch die tatsächliche euklidische Distanz zwischen den Symbolen. Gl. (2.24) kann durch eine Näherung weiter vereinfacht werden

$$\operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x+y}{2}} \right) \leq \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right) \cdot e^{-\frac{y}{2}} \quad (2.25)$$

Mit dieser Näherung folgt aus Gl. (2.24)

$$\begin{aligned} P_e(\mathbf{x}) &\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathbf{x}'} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\underbrace{\frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}}_{x/2} + \underbrace{d_e^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s}{4N_0}}_{y/2} - \frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}} \right) \cdot e^{\frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}} \cdot \sum_{\mathbf{x}'} \exp \left(-d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s}{4N_0} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus Gl. (2.26) ist ersichtlich, dass nur noch der letzte Term von der euklidischen Distanz zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}' abhängt. Dies erweist sich gleich als nützlich, da nun eine einfache Beschreibung mit Hilfe des Distanzspektrums möglich ist (wie auch bei Faltungscodes). Um nun auf die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit P_e schließen zu können, sind alle Sequenzen \mathbf{x} zu betrachten. Allgemein gilt der Zusammenhang für die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_{\mathbf{x}} P(\text{Decodierfehler}, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \cdot P(\text{Decodierfehler}|\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \cdot P_e(\mathbf{x}) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}} \right) \cdot e^{\frac{\Delta_f^2 \cdot E_s}{4N_0}} \cdot \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\mathbf{x}'} \exp \left(-d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s}{4N_0} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Der letzte Exponentialausdruck in Gl. (2.27) kann nun mit Hilfe des Distanzspektrums beschrieben werden. Da bei der TCM wie bereits erwähnt nicht nur der Nullpfad, sondern **alle** Sequenzen betrachtet werden müssen, ist

auch deren Auftrittswahrscheinlichkeit $P(\mathbf{x})$ zu beachten. Wir erhalten folgenden Ausdruck für das Distanzspektrum einer TCM

$$T(W, D) = \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\mathbf{x}'} D^{d_e^2(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \cdot W^{w(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \quad (2.28)$$

Die Funktion $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ in Gl. (2.28) gibt die Anzahl der Bitfehler bei einer Verwechslung von \mathbf{x} und \mathbf{x}' an. Sind beispielsweise \mathbf{x} und \mathbf{x}' aus den Informationsfolgen \mathbf{u} und \mathbf{u}' hervorgegangen, so gilt

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d_H(\mathbf{u}, \mathbf{u}') .$$

Ein Vergleich von Gl. (2.27) und Gl. (2.28) zeigt, dass bei geeigneter Wahl von D und W das Distanzspektrum in der Abschätzung der Fehlerwahrscheinlichkeit P_e schon enthalten ist. Mit $D = e^{-\frac{E_s}{4N_0}}$ und $W = 1$ erhalten wir die Symbolfehlerrate

$$P_e \leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \right) \cdot e^{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \cdot T \left(D = e^{-\frac{E_s}{4N_0}}, W = 1 \right) \quad (2.29)$$

Um eine Abschätzung der Bitfehlerrate P_b zu erhalten, ist nun die Anzahl der unterschiedlichen Infobit $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}' zu berücksichtigen.

$$P_b \leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \right) \cdot e^{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \cdot \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\mathbf{x}'} \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{m} \cdot \exp \left(-d_e^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \frac{E_s}{4N_0} \right) \quad (2.30)$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \right) \cdot e^{\Delta_f^2 \cdot \frac{E_s}{4N_0}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left. \frac{\partial T(D, W)}{\partial W} \right|_{D=e^{-\frac{E_s}{4N_0}}, W=1} \quad (2.31)$$

Die Bilder 2.24 und 2.25 zeigen die Ergebnisse der analytischen Abschätzung der Bitfehlerrate in Abhängigkeit des Signal-Rausch-Abstandes E_b/N_0 in dB. Sie sind für die besten Codes nach Ungerböck erzielt worden [VWZP89]. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Anzahl von Zuständen die Leistungsfähigkeit ständig steigt. Für die codierte 8-PSK wird bei einer Bitfehlerrate von $P_b = 10^{-5}$ ein maximaler Gewinn gegenüber der uncodierten QPSK von 3,6 dB erzielt (64 Zustände). Dies liegt noch etwa 3,4 dB von dem nach Shannon theoretisch möglichen Gewinn entfernt. Zwar kann durch weitere Erhöhung der Anzahl an Zuständen die Leistungsfähigkeit weiter verbessert werden, allerdings steigt damit aber auch der Decodieraufwand exponentiell an (siehe Faltungscodes). Außerdem ist es unwahrscheinlich, dass dieser Weg überhaupt zum theoretischen Optimum führt. Allerdings bleibt festzuhalten, dass mit der trelliscodierten Modulation die Leistungsfähigkeit von Übertragungssystemen wesentlich verbessert werden kann, ohne die spektrale Effizienz des Systems zu verändern. Es ist lediglich ein größerer Rechenaufwand im Empfänger erforderlich.

2.7 Pragmatischer Ansatz nach Viterbi

Ein praktischer Nachteil der im letzten Abschnitt vorgestellten Strukturen wird deutlich, wenn man moderne Konzepte der Nachrichtenübertragung betrachtet. So spielt die Anpassung an zeitvariante Kanaleigenschaften, aber auch die Adaptivität bzgl. der vom Nutzer geforderten Datenraten eine immer wichtigere Rolle. Die Resource *Bandbreite* soll nicht länger einem Nutzer für die Dauer einer Verbindung fest zugewiesen werden, sondern je nach Anforderung flexibel vergeben werden. So kann sie in Zeiten geringer Nutzung anderen Netzteilnehmern zur Verfügung gestellt werden und die Effizienz des Systems gesteigert werden.

Im Hinblick auf die optimale TCM nach Ungerböck bedeutet dies, dass je nach Anforderung zwischen Konstellationen mit unterschiedlicher spektraler Effizienz η umgeschaltet werden muss. Da die TCM aber für jedes η eigens optimiert wurde und somit unterschiedliche Schieberegisterstrukturen zum Einsatz kommen, erfordert dieser Ansatz einen hohen Aufwand an Hardware (mehrfache Realisierung für verschiedene η). Dies wirkt sich insbesondere im Empfänger aus.

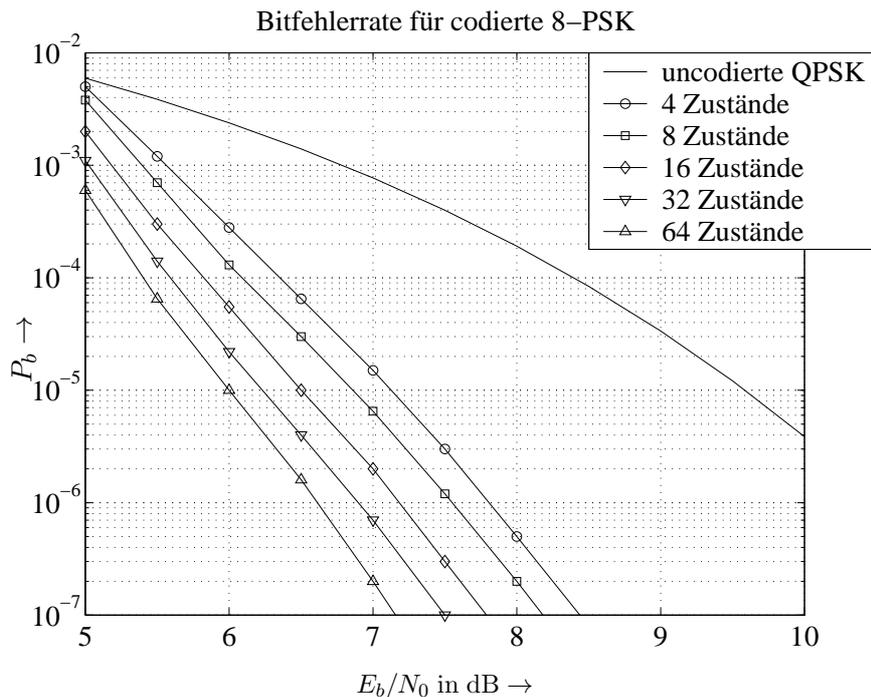


Bild 2.24: Analytischen Abschätzung der Bitfehlerrate für codierte 8-PSK und unterschiedliche Anzahl von Zuständen [VWZP89]

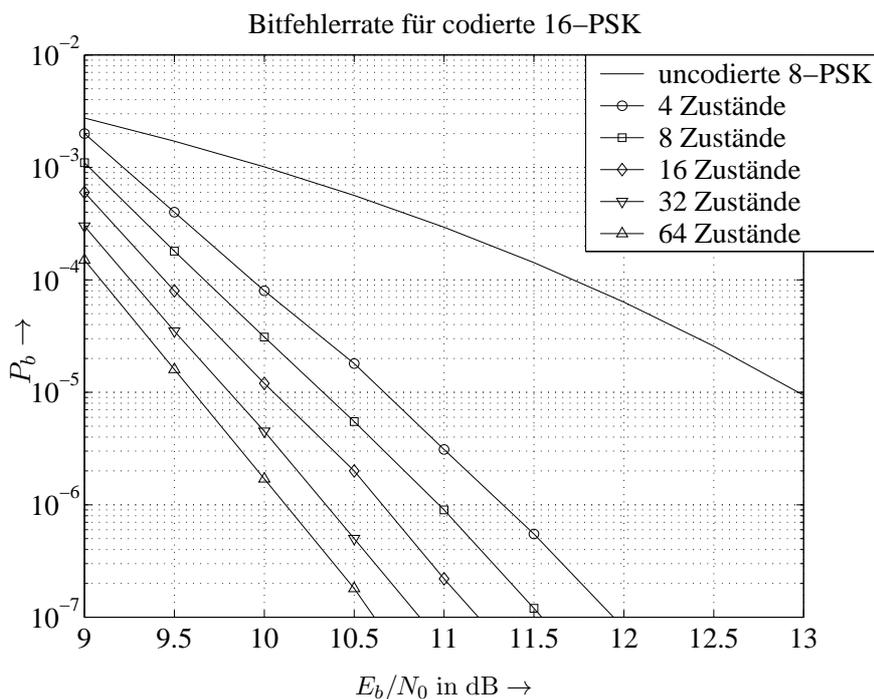


Bild 2.25: Analytischen Abschätzung der Bitfehlerrate für codierte 16-PSK und unterschiedliche Anzahl von Zuständen [VWZP89]

Einen anderen Ansatz, der die geforderte Flexibilität besser berücksichtigt, stellt die *Pragmatische TCM* von Viterbi dar [VWZP89]. Ihr Konzept ist in Bild 2.26 illustriert.

Der Ansatz der pragmatischen TCM besteht aus einem konventionellen halbratigen Faltungscodes (NSC) mit der Einflußlänge $L_c = 7$, wie er im letzten Semester vorgestellt wurde. Reicht eine spektrale Effizienz von $\eta = 1$ bit/s/Hz aus, so wird zur Übertragung eine QPSK zusammen mit dem NSC-Code ($R_c = 1/2$) verwendet.

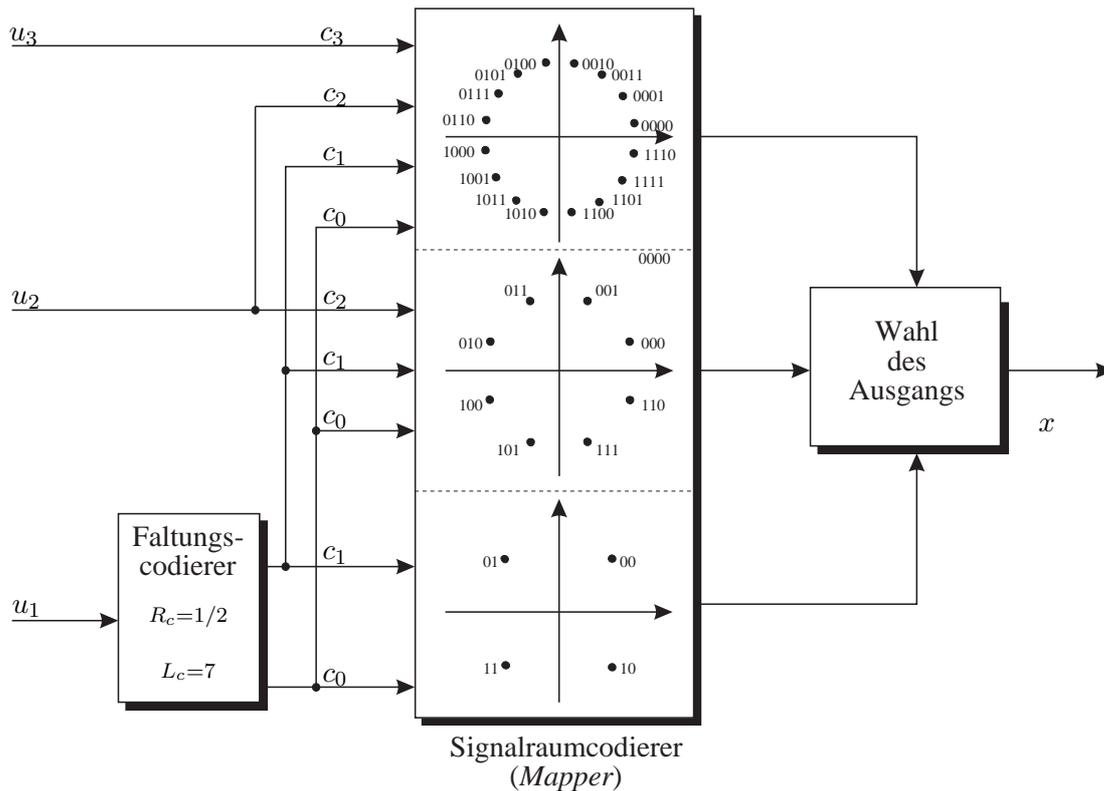


Bild 2.26: Struktur des pragmatischen TCM-Codierers nach Viterbi

Für $\eta = 2$ bit/s/Hz ist dagegen die 8-PSK zu wählen. Dabei wird das erste Informationsbit u_1 wie bisher durch den Faltungscode codiert, an der Codierer- bzw. Decodiererstruktur im Empfänger (Viterbi) ändert sich also nichts. Das dritte nun zu nutzende Bit eines 8-PSK-Symbols wird mit dem zweiten Informationsbit u_2 (uncodiert) belegt, welches bestimmt, ob die obere (000, 001, 011, 010) oder die untere Halbebene (100, 101, 111, 110) des 8-PSK-Signalraums verwendet wird. Die Ausgangsbit c_0 und c_1 des NSC-Codes legen dann das konkrete Symbol aus der gewählten Halbebene fest. Im Trellisdiagramm treten jetzt also von und zu jedem Zustand 2 parallele Zweige auf.

Für $\eta = 3$ bit/s/Hz muss nun noch ein zweites uncodiertes Bit u_3 hinzugenommen werden. Die beiden uncodierten Bit u_2 und u_3 bestimmen nun den Quadranten, aus dem die codierten Bit c_0 und c_1 das letztendlich zu sendende Symbol bestimmen.

Durch diese Struktur ist ein hohes Maß an Flexibilität gegeben, da sich bei ändernder spektraler Effizienz nur die Anzahl der je Symbol uncodiert übertragenen Informationsbit ändert, nicht aber die Struktur der Codierung. Natürlich führt dieser Ansatz nicht zu einer optimalen Struktur, die Verluste gegenüber der optimalen TCM nach Ungerböck halten sich jedoch in Grenzen. Bei einer Bitfehlerrate von $P_b = 10^{-5}$ verzeichnet die pragmatische TCM für die 8-PSK nur einen Verlust von etwa 0,4 dB gegenüber Ungerböcks TCM, bei der 16-PSK sind beide Verfahren sogar identisch, weil hier auch die Struktur nach Ungerböck einen halbratigen Faltungscode einsetzt.

2.8 Mehrstufencodes nach Imai

2.8.1 Struktur des Codierers

Es wurde bereits mehrfach erwähnt, dass die hier vorgestellte TCM nach Ungerböck beim AWGN-Kanal zu optimalen Ergebnissen führt. Die verschiedenen Kombinationen von Codierungs- und Modulationsverfahren

führen stets zur maximalen kleinsten euklidischen Distanzen, die für die Leistungsfähigkeit beim AWGN-Kanal entscheidend sind.

Für Schwundkanäle, wie sie häufig im Bereich des Mobilfunks auftreten, gelten allerdings andere Optimierungskriterien. Hier ist beispielsweise die kleinste Anzahl unterschiedlicher Symbole zweier Sequenzen entscheidend. Während im binären Fall beide Kriterien identisch sind, gilt dies für höherstufige Modulationsverfahren nicht mehr. Ist die kleinste Anzahl unterschiedlicher Symbole bei zwei Ansätzen identisch, entscheidet das größere Produkt der euklidischen Distanzen entlang zweier Pfade.

Der in diesem Abschnitt behandelte Ansatz von Imai wird in der Literatur als Mehrstufencode (*Multilevel Code*, MLC) bezeichnet. Er zeigt insbesondere bei Schwundkanälen ein wesentlich besseres Verhalten. Die prinzipielle Struktur ist in Bild 2.27 dargestellt und ähnelt in seinem grundsätzlichen Aufbau dem von Ungerböck.

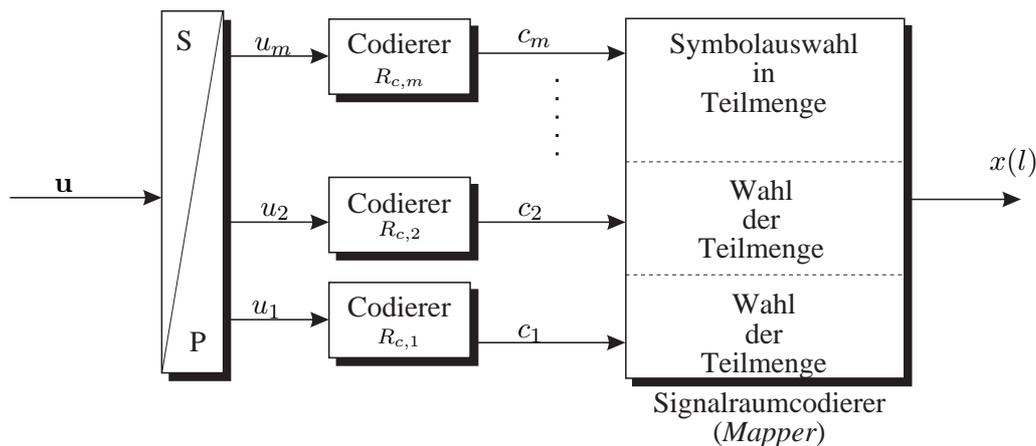


Bild 2.27: Struktur der Mehrstufencodes nach Imai

Der Unterschied besteht darin, dass bei MLC's nicht mehr rein zwischen codierten und uncodierten Bit unterschieden wird. Vielmehr wird nach der seriell-parallel-Umsetzung jedem Zweig ein eigener Codierer mit entsprechender Komplexität und Coderate zugeordnet. Im Extremfall besitzen einige der Codierer die Coderate $R_c = 1$, d.h. an den Signalraumcodierer können auch uncodierte Bit gelangen. Eine mögliche Strategie ist die folgende:

- Zerteile den Signalraum nach dem *Set-Partitioning* nach Ungerböck.
- Aufgrund der wachsenden euklidischen Distanz in den Teilmengen besitzen diese nach jedem Partitionierungsschritt eine größere *äquivalente Kanalkapazität*.
- Jeder Zweig des Mehrstufencodes entscheidet über einen Partitionierungsschritt.
- Der Code in einem Zweig ist dann derart zu dimensionieren, dass er der Kanalkapazität der entsprechenden Partitionierungsmenge gerecht wird.
- Da die euklidische Distanz von Partitionsstufe zu Partitionsstufe stetig zunimmt, wächst auch die Kanalkapazität an und die Codes werden immer schwächer.
- Im Extremfall besitzen die Zweige, die mit den letzten Partitionierungsschritten korrespondieren, gar keinen Codierer mehr (wie auch bei der TCM nach Ungerböck und der pragmatischen TCM nach Viterbi).

2.8.2 Prinzip der Decodierung

Die Decodierung erfolgt nach dem in Bild 2.28 gezeigten Verfahren, welches als kaskadierte Decodierung bezeichnet wird. Zunächst wird der Code, welcher mit der ersten Partitionierungsstufe korrespondiert, decodiert.

Dies bedeutet, dass bei der Decodierung nicht zwischen zwei Symbolen, sondern zwischen den beiden Partitionierungsmengen entschieden wird. Der Decodierer 1 liefert zwei Ausgänge, die geschätzten Informationsbit \hat{u}_1 und die geschätzte recodierte Folge \hat{c}_1 . Letztere enthält die (geschätzte) Wahl der Partitionierungsmengen der ersten Stufe zu den jeweiligen Zeitpunkten und ist somit eine wichtige Entscheidungsgrundlage für den zweiten Decodierer. Dieser beschränkt sich nun nämlich bei seiner Suche nach dem ML-Pfad auf die durch \hat{c}_1 festgelegten Partitionierungsmengen. Das Verfahren wird so weiter geführt, bis die unterste Partitionierungsebene erreicht wird und der Decodierer m zwischen den beiden verbliebenen Symbolen entscheiden muss.

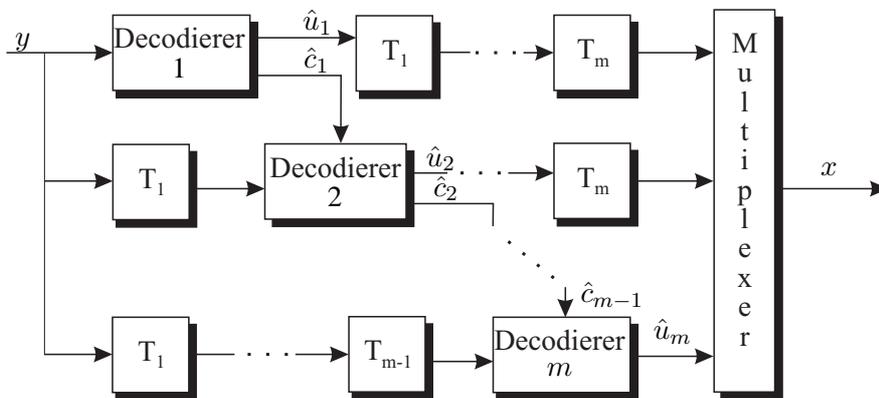


Bild 2.28: Struktur der kaskadierten Decodierung von Mehrstufencodes

Die Struktur hat neben ihrem hohen Aufwand auch noch den Nachteil, dass Fehlentscheidungen eines Decodierers unweigerlich zu Folgefehlern in den nachfolgenden Decodierern führen, es kommt also zu einer Fehlerfortpflanzung. Um diesen Effekt zu minimieren, werden z.B. zwischen den einzelnen Decodierern (und natürlich auch den Codierern) Interleaver eingesetzt, die die Bündelfehler am Ausgang eines Decodierers in Einzelfehler spreizen. Des weiteren kann der gesamte Decodiervorgang auch wiederholt werden, d.h. der erste Decodierer decodiert nun erneut den empfangenen Datenstrom, jetzt aber mit der Kenntnis aller übrigen Entscheidungen – außer seiner eigenen –, usw. (siehe Bild 2.29). Wir erhalten somit einen iterativen Decodierprozess. Wie später noch gezeigt wird, ist es dann von Vorteil, Decodieralgorithmen einzusetzen, die neben der harten Entscheidung auch ein Maß für die Zuverlässigkeit des Ergebnisses liefern (*Soft-In/Soft-Out-Decoder*).

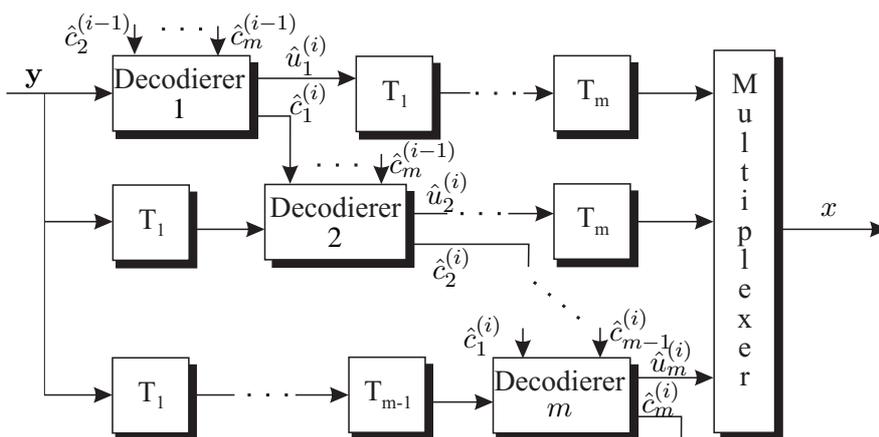


Bild 2.29: Struktur der kaskadierten Decodierung mit Iterationen von Mehrstufencodes

2.8.3 Optimierung

Bezüglich einer Optimierung der gesamten Anordnung stellt sich nun die Frage, wie die Coderaten in den einzelnen Stufen zu wählen sind, damit sich insgesamt ein möglichst leistungsfähiger Code ergibt. Eine einfache Möglichkeit besteht beispielsweise darin, allen Stufen den gleichen Code zuzuweisen. Dieser Ansatz trägt aber

nicht der Tatsache Rechnung, dass jeder Partitionierungsstufe ein anderes Signalraumalphabet zur Verfügung steht. Damit sieht jeder Codierer einen unterschiedlichen äquivalenten Übertragungskanal mit entsprechender Kanalkapazität. Außerdem wäre es sinnvoll, möglichst starke Codes in den ersten Stufen einzusetzen, um bei der Decodierung Folgefehler zu vermeiden.

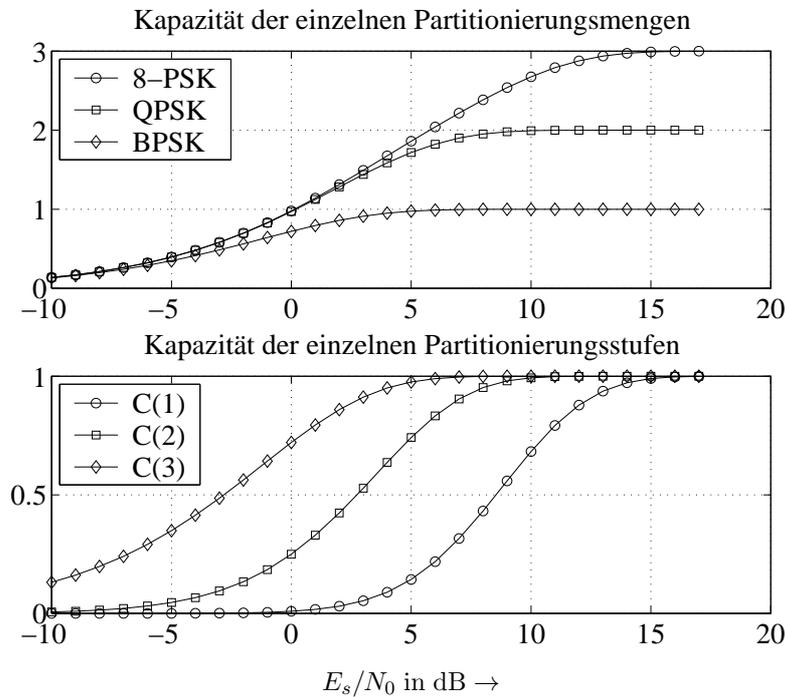


Bild 2.30: Kanalkapazität für Mehrstufencodes (8-PSK) beim AWGN-Kanal

Theoretisch kann dieses Problem mit Hilfe der Informationstheorie gelöst werden. Für jede Teilmenge des Signalraumalphabets, die durch das *Set-Partitioning* gebildet wird, kann die Kanalkapazität gemäß Gl. (2.14) berechnet werden. Beispielsweise besitzt das Gesamtsystem für eine 8-PSK die im oberen Diagramm von Bild 2.30 gezeigte Kapazität. Im ersten Partitionierungsschritt entstehen zwei QPSK-Signalräume mit entsprechend verringerter Kapazität, im zweiten Schritt dann vier BPSK-Mengen.

Dabei ist zu beachten, dass die codierten Bit der einzelnen Stufen nicht ein Symbol innerhalb der jeweiligen partitionierten Mengen auswählen, sondern sie bestimmen die Menge selbst, die dann in der folgenden Partitionierungsstufe verwendet werden soll. Somit wird die Kapazität einer bestimmten Stufe nicht anhand der Symbole einer Teilmenge bestimmt, sondern durch Partitionierung der Teilmengen. Es kann gezeigt werden, dass die Kapazität $C(1)$ der ersten Partitionierungsstufe aus der Differenz der Kapazitäten von 8-PSK und QPSK berechnet wird

$$C(1) = C(8 - PSK) - C(QPSK) . \tag{2.32}$$

Entsprechend gilt für die nächste Partitionierungsstufe

$$C(2) = C(QPSK) - C(BPSK) \tag{2.33}$$

und trivialerweise $C(3) = C(BPSK)$. Die Ergebnisse zeigt das untere Diagramm in Bild 2.30 für eine 8-PSK. So weist die erste Partitionierungsstufe die geringste Kapazität auf, da hier zwischen zwei QPSK-Mengen unterschieden werden muss, deren gegenseitige euklidische Distanzen sehr gering sind. Außerdem kommt noch der Nachteil der Mehrfachrepräsentation hinzu, da jede Menge aus mehreren Symbolen besteht. In der zweiten Stufe nimmt die Kapazität zu, hier wird zwischen BPSK-Mengen unterschieden. Die größte Kapazität besitzt die letzte Stufe, da hier nur eine normale BPSK-Modulation stattfindet, die Kurve ist schon aus dem letzten Semester bekannt. Die Summe aller Kurven ergibt dann die Kapazitätskurve der 8-PSK aus dem oberen Diagramm.

Die Codierung ist nun derart vorzunehmen, dass in den ersten Partitionierungsstufen starke Codes (Gedächtnis, Coderate) eingesetzt werden, da hier die Kapazität am geringsten ist. In den letzten Ebenen der Partitionierung reichen dann relativ schwache Codes aus, unter Umständen kann sogar ganz auf eine Codierung verzichtet werden. Die Bilder 2.31 und 2.32 zeigen die Ergebnisse für eine 16-PSK und eine 16-QAM.

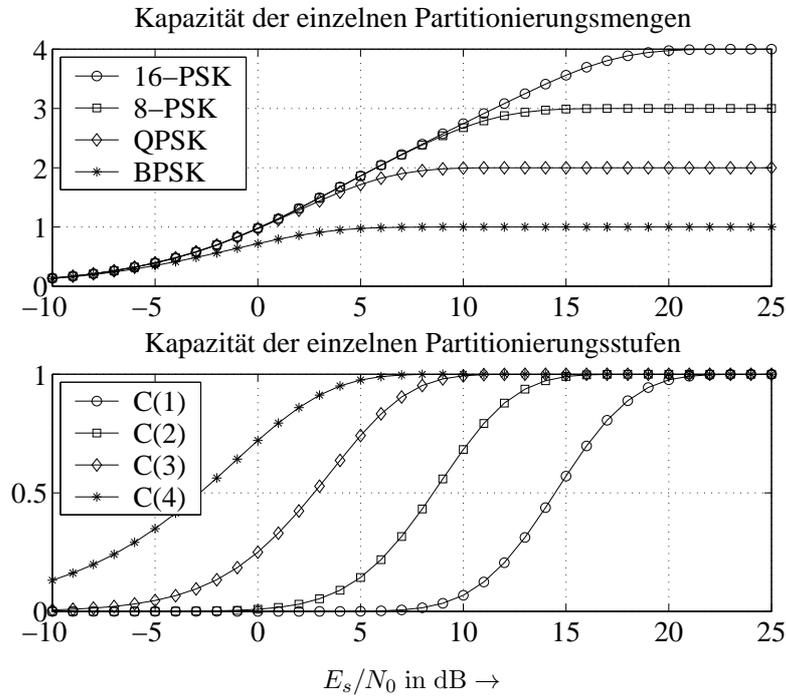


Bild 2.31: Kanalkapazität für Mehrstufencodes (16-PSK) beim AWGN-Kanal

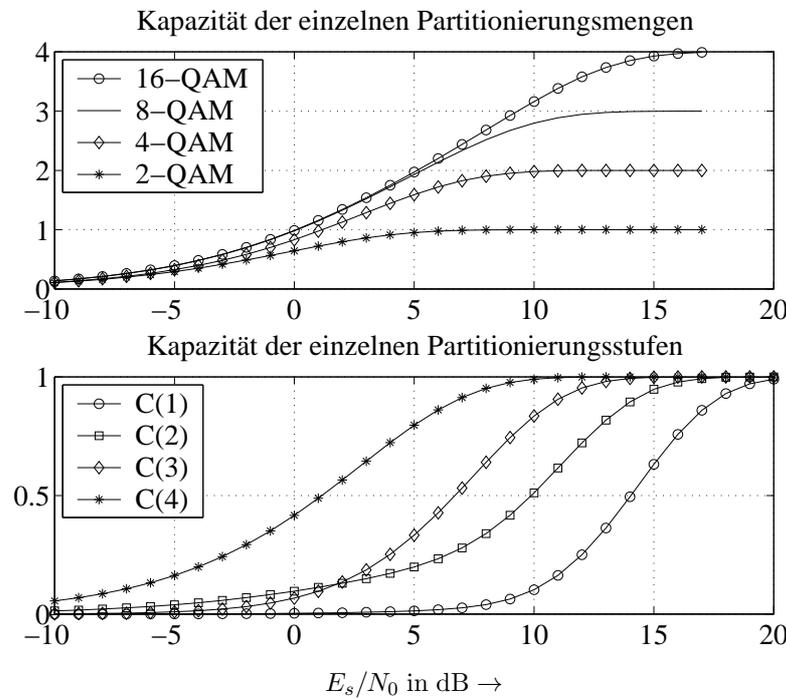


Bild 2.32: Kanalkapazität für Mehrstufencodes (16-QAM) beim AWGN-Kanal

2.9 TCM in der Modemtechnik

Modem: Modulator - Demodulator

Der Telefonkanal ist ein prädestiniertes Medium für den Einsatz der TCM. Hier gilt es nämlich, über einen sehr schmalbandigen Kanal möglichst hohe Datenraten mit einer möglichst hohen Qualität (geringe Fehlerrate) zu übertragen. Die derzeit aktuellen Modems nach V.90 können bis zu 55,6 kbit/s über einen Kanal mit nur 3,2 kHz Bandbreite übertragen; das ist mit einer einfachen binären Modulationsform nicht möglich. Hier müssen bandbreiteneffiziente Verfahren wie die TCM zum Einsatz kommen.

Telefonkanal:

Bandbreite: AWGN-Kanal mit $B \leq 3.200$ Hz

Signal-Rausch-Abstand: $E_s/N_0 = 28$ dB ... 36 dB

Kanalkapazität: $C^{1D} = B \cdot \text{ld} \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \right) = 30 \dots 38$ kbit/s

(bei reiner AWGN-Störung)

$C^{2D} = 2B \cdot \text{ld} \left(1 + \frac{E_s}{2N_0} \right) = 56 \dots 70$ kbit/s

Entgegen der Annahme reiner AWGN-Störungen treten auf Telefonkanälen auch Impulsstörungen, Übersprechen, Mehrwegeausbreitung und nichtlineare Störungen auf. Die tatsächliche Kapazität liegt also unter der oben angegebenen.

Standards durch CCITT / ITU

CCITT: *Comité Consultatif International de Télégraphique et Téléphonique*)

jetzt ITU: *International Telecommunication Union*

- V.26: – 1962, 1968 als Standard
– uncodierte 4-PSK
– 2,4 kbit/s bzw. 1,2 kbaud
– analoger, fester Entzerrer (Kompromiß für mittleres Kanalprofil)
- V.27: – 1967
– uncodierte 8-PSK
– 4,8 kbit/s bzw. 1,6 kbaud
– durch größere Bandbreite dispersiver Kanal \rightarrow System empfindlicher
– einstellbarer, analoger Entzerrer
- V.29: – uncodierte 16-QAM
– 9,6 kbit/s bzw. 2,4 kbaud
– System noch empfindlicher
– Entzerrung durch digitalen T-Entzerrer

Erst jetzt hält die Kanalcodierung Einzug in die Modemtechnik, da die technologische Entwicklung mittlerweile soweit voran geschritten ist, dass relativ aufwendige Verfahren wie die Decodierung der TCM realisierbar sind.

- V.32: – 1981

- 32-QAM TCM (rotationsinvariant, von Wei)
 - 14,4 kbit/s bzw. 3,6 kbaud
 - *Fractional Spacing Equalizer*, digitaler T-Entzerrer, Überabtastung
- V.33:
- 128-QAM TCM
 - 14,4 kbit/s bzw. 2,4 kbaud
 - 64-QAM TCM
 - 12 kbit/s bzw. 2,4 kbaud
- V.34:
- 960-QAM TCM
 - adaptive Anpassung an den Kanal (Ausmessen des Kanals erforderlich)
 - Coderaten $R_c = 2/3$ (16 Zustände), $R_c = 3/4$ (32 Zustände), $R_c = 4/5$ (64 Zustände)
 - $B = 3,2$ kHz
 - 2,4 kbit/s . . . 28,8 kbit/s
- V.34:
- 960-QAM TCM
 - adaptive Anpassung an den Kanal (Ausmessen des Kanals erforderlich)
 - Coderaten $R_c = 2/3$ (16 Zustände), $R_c = 3/4$ (32 Zustände), $R_c = 4/5$ (64 Zustände)
 - $B = 3,2$ kHz
 - 2,4 kbit/s . . . 28,8 kbit/s

Ein wichtiger Aspekt der Modem-Technik ist die Entzerrung des Telefonkanals. Schon in den 80er Jahren, als noch uncodiert übertragen wurde, konnte die Datenrate aufgrund besserer Entzerrungsverfahren deutlich verbessert werden. Nach den analogen Entzerrern wurden vorwiegend digitale T-Entzerrer eingesetzt, da die optimale MLSE-Lösung viel zu aufwendig war. Entscheidungsrückgekoppelte Entzerrer eignen sich ebenfalls nicht, weil einerseits die Rückkopplung der detektierten Werte ohne Einbeziehung der Kanaldecodierung zu viele Folgefehler verursachen würde, und andererseits eine Berücksichtigung der Decodierung zu große Verzögerungszeiten mit sich bringt. Eine Alternative stellt die adaptive Vorcodierung nach Tomlinson-Harashima dar, die nach entsprechender Kanalschätzung die Signale sendeseitig so vorverzerrt, dass nach der Übertragung nur noch geringe Kanaleinflüsse auftreten.