definiert. Damit erhalten wir aus (14.1.11)

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}_d \cdot \mathbf{h} + \mathbf{n}. \tag{14.1.13}$$

Im Folgenden sollen die Kanalkoeffizienten im *Maximum-Likelihood*-Sinne geschätzt werden. Im Gegensatz zu Abschnitt 11.1, wo es um die Entscheidung über ein diskretes Symbol aus einem endlichen vorgegebenen Symbolvorrat ging, sind hier die *kontinuierlichen Variablen* $h(0), \cdots, h(\ell-1)$ zu ermitteln. Die Lösung erfolgt über die Maximierung der Verteilungsdichte des Empfangssignals unter der Bedingung, dass der Kanal die Impulsantwort $\mathbf{h}$ aufweist:

$$\hat{\mathbf{h}} = \underset{\mathbf{h}}{\operatorname{argmax}}\{p_{\mathbf{Y}|\mathbf{h}}(\mathbf{y})\}. \tag{14.1.14}$$

Setzt man gaußverteiltes Kanalrauschen mit einer Autokorrelationsmatrix $\mathbf{R}_{NN}$ an, so gilt

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Y}|\mathbf{h}}(\mathbf{y}) &= p_N(\mathbf{y} - \mathbf{S}_d\,\mathbf{h}) \qquad (14.1.15) \\ &= \frac{1}{\pi^N \det\{\mathbf{R}_{NN}\}} \exp\big(-[\mathbf{y}^H - \mathbf{h}^H\,\mathbf{S}_d^H] \cdot \mathbf{R}_{NN}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{S}_d\,\mathbf{h}]\big). \end{aligned}$$

Der Exponent dieses Ausdrucks lässt sich nach Ausmultiplikation und quadratischer Ergänzung mit der Definition der Matrizen

$$\mathbf{A} = \big(\mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d\big)^{-1} \mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d \tag{14.1.16}$$

auf die Form

$$-\big[\mathbf{h}^H - \mathbf{y}^H\,\mathbf{A}^H\big] \cdot \mathbf{B} \cdot \big[\mathbf{h} - \mathbf{A}\,\mathbf{y}\big] - \mathbf{y}^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{y}^H \mathbf{A}^H \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{y}$$

bringen. Damit kann (14.1.15) in folgender Weise umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Y}|\mathbf{h}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{\pi^N \det\{\mathbf{R}_{NN}\}} \exp\big(-\mathbf{y}^H [\mathbf{R}_{NN}^{-1} - \mathbf{A}^H \mathbf{B} \mathbf{A}]\,\mathbf{y}\big) \cdot \\ &\quad \cdot \exp\big(-[\mathbf{h}^H - \mathbf{y}^H \mathbf{A}^H] \cdot \mathbf{B} \cdot [\mathbf{h} - \mathbf{A}\,\mathbf{y}]\big). \end{aligned} \tag{14.1.17}$$

Der zweite Term dieses Ausdrucks enthält die quadratische Abhängigkeit vom Koeffizientenvektor $\mathbf{h}$; er beschreibt eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mathbf{A}\,\mathbf{y}$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{B}^{-1}$. Die Maximierung in Abhängigkeit von $\mathbf{h}$, also die Maximum-Likelihood-Kanalschätzung, ergibt sich durch Nullsetzen des Exponenten, d.h. aus der Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Nach Einsetzen von (14.1.16) folgt

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ML}} = \big(\mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d\big)^{-1}\, \mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1}\, \mathbf{y}. \tag{14.1.18}$$

Zur Überprüfung der Erwartungstreue dieses Schätzwertes setzen wir für den Empfangsvektor $\mathbf{y}$ Gleichung (14.1.13) ein und bilden den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\hat{\mathbf{h}}_{\text{ML}}\} &= \big(\mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d\big)^{-1}\, \mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \cdot [\mathbf{S}_d\,\mathbf{h} + \underbrace{\mathrm{E}\{\mathbf{N}\}}_{=\mathbf{0}}] \\ &= \big(\mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d\big)^{-1} \cdot \big(\mathbf{S}_d^H \mathbf{R}_{NN}^{-1} \mathbf{S}_d\big) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h}. \end{aligned} \tag{14.1.19a}$$