c) Berechnen Sie die Spektren der unter b) erzeugten Impulse und stellen Sie sie graphisch dar.

Aufgabe 1.1.3

Approximation eines idealen Tiefpasses durch ein nichtrekursives digitales Filter
(Lösung Seite 16)

a) Geben Sie die Impulsantwort $h_{\mathrm{TP}}(k)$ eines zeitdiskreten idealen Tiefpasses der Grenzfrequenz Ω_g an. Stellen Sie sie für den Fall $\Omega_g = \pi/3$ mittels der Graphik-Routine `stem` im Zeitausschnitt $-16 \leq k \leq 16$ dar.

b) Zur Approximation durch ein nichtrekursives Filter (*FIR-, Finite Impulse Response-Filter*) der Ordnung n wird eine Zeitbegrenzung auf das Intervall $-n/2 \leq k \leq n/2$ vorgenommen, wobei n als gerade angenommen wird. Bestimmen Sie mittels `f_trafo` die Frequenzgänge der mit $n = 32$ und $n = 256$ approximierten idealen Tiefpässe und stellen Sie sie in einem Diagramm gegenüber. Schildern Sie die prinzipiellen Eigenschaften dieser Approximationen.

c) Zur Verbesserung der Approximationsgüte wird statt eines einfachen Abbruchs der idealen Impulsantwort eine Fensterung mittels geeigneter Fensterfunktionen durchgeführt. Eine der bekanntesten Fensterfunktionen ist das *Hann-Fenster* (gerades n):

$$w_{\mathrm{Hann}}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,[1+\cos(2\pi\,k/n)] & \text{für } |k| \leq \frac{n}{2}; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hiermit ergibt sich die approximierte zeitbegrenzte Impulsantwort

$$h_{\mathrm{Hann}}(k) = h_{\mathrm{TP}}(k) \cdot w_{\mathrm{Hann}}(k).$$

Führen Sie für $n = 32$ und $n = 256$ Hann-Fensterentwürfe durch und stellen Sie die zugehörigen Frequenzgänge graphisch dar. Vergleichen Sie die Eigenschaften mit den durch einfache Zeitbegrenzung erzielten Ergebnissen.

d) Die Impulsantwort eines idealen Tiefpasses ist $\sin(x)/x$-förmig; sie weist also *äquidistante Nulldurchgänge* an den Stellen[9] $t_\nu = \nu/(2f_g),\ \nu = \pm 1, \pm 2, \cdots$ auf. An dieser Eigenschaft ändert sich auch durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion nichts. Man bezeichnet Impulse mit dieser Eigenschaft als

[9] Im zeitdiskreten Falle ergeben sich für die Zeitindizes $k_\nu = \nu\,\pi/\Omega_g$ Nulldurchgänge, falls π/Ω_g ganzzahlig ist.