$$P_{korrekt}^{\mathrm{QPSK}} = 1 - P_s^{\mathrm{QPSK}} = (1 - P_s^{\mathrm{BPSK}})^2 \,. \tag{6.5.7}$$

Hieraus folgt für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_s^{\mathrm{QPSK}} = 1 - (1 - P_s^{\mathrm{BPSK}})^2 = \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) - \left[\frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)\right]^2 \,. \tag{6.5.8}$$

Höherstufige PSK. Für $M > 4$ existieren im allgemeinen keine geschlossenen Lösungen für Bit- und Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten. Außerdem können Real- und Imaginärteil nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden, da die Information in der Phase der Symbole liegt. Für eine Näherungslösung wird von der Annahme Gebrauch gemacht, daß Fehlentscheidungen zwischen nicht benachbarten Symbolen zu vernachlässigen sind [Kam96]. Unter dieser Voraussetzung hängt die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit wiederum von der euklidischen Distanz Δ_0 zwischen benachbarten Symbolen ab. Es gilt hier mit $E_s = \mathrm{ld}(M)E_b$

$$P_s^{M-\mathrm{PSK}} \approx \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\mathrm{ld}(M)\frac{E_b}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \,. \tag{6.5.9}$$

Bei Anwendung der Gray-Codierung behält (6.5.1) als Approximation weiterhin ihre Gültigkeit. Allerdings ist zu beachten, daß dies nur zu einer mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit führt. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten für verschiedene Bits eines Symbols können durchaus voneinander abweichen, wie in Übungsaufgabe 6.5.2 gezeigt wird.

Neben der Näherung aus (6.5.9) existiert auch eine exakte Lösung zur Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit [BBC87, IS91]. Sie beruht auf der Transformation der kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und der numerischen Integration über der Phase in der komplexen Ebene. An dieser Stelle soll keine Herleitung gegeben werden, die Berechnungsvorschrift steht allerdings in der MATLAB-Routine `pb_psk_awgn` zur Verfügung. Mit dieser Vorschrift können beliebig genaue Ergebnisse erzielt werden. Unterschiede zur Näherungslösung ergeben sich aber nur für kleine Signal-Rausch-Abstände. Für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit können die P_μ numerisch bestimmt und in (6.5.4) eingesetzt werden.

Die Ergebnisse für Symbol- und Bitfehlerwahrscheinlichkeiten sind in den **Bildern 6.5.3a** und **b** zu sehen. Die Erhöhung der spektralen Effizienz ist mit einer Verschlechterung der Übertragungsqualität verbunden. Asymptotisch für große Werte von M geht mit der Verbesserung der Effizienz um 1 bit/s/Hz ein Verlust von etwa 6 dB einher [Pro95].

Höherstufige ASK. Für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit der reellwertigen eindimensionalen Pulsamplitudenmodulation (PAM) oder auch *Amplitude Shift*

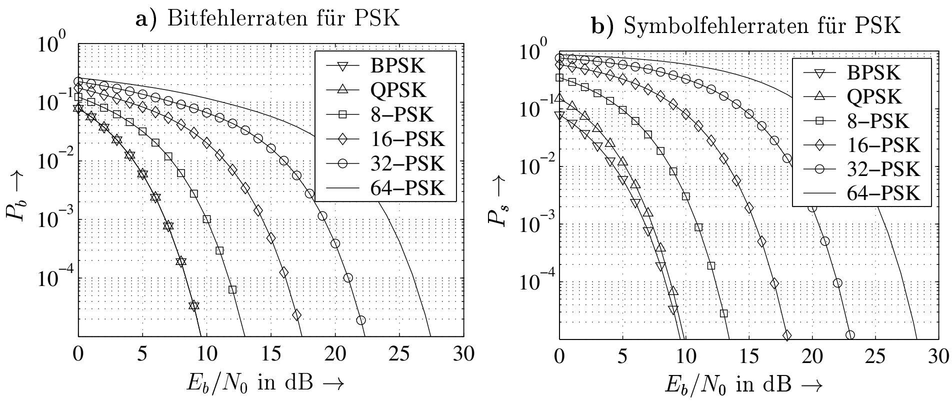

Bild 6.5.3: Bit- und Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten für PSK und AWGN-Kanal

Keying (ASK) existiert ein geschlossener Ausdruck [Pro95]

$$P_s^{M-\mathrm{PAM}} = \frac{M-1}{M} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \mathrm{ld}(M)}{M^2-1} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right) . \tag{6.5.10}$$

Vernachlässigt man Entscheidungsfehler zwischen nicht benachbarten Signalpunkten und nimmt eine Gray-Codierung an, so erhält man für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_b^{M-\mathrm{PAM}} \approx \frac{1}{\mathrm{ld}(M)} \cdot P_s^{M-\mathrm{PAM}} = \frac{M-1}{\mathrm{ld}(M)M} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \mathrm{ld}(M)}{M^2-1} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right) . \tag{6.5.11}$$

Zu exakten Ergebnissen führt die in Abschnitt 6.5.1 beschriebene Methode mit den Gewichten $\bar{w}_\mu$.

Höherstufige QAM. Bei quadratischer M-QAM Modulation lassen sich aufgrund der symmetrischen Anordnung und bei entsprechender Gray-Codierung Real- und Imaginärteil getrennt betrachten. Analog zur Vorgehensweise bei der QPSK kann dann ausgehend von der rellen ASK einfach die Erweiterung auf die komplexe Ebene vorgenommen werden. Mit der Substitution $M \rightarrow \sqrt{M}$ und wegen $E_b/N_0|_{\sqrt{M}-\mathrm{PAM}} = E_b/N_0|_{M-\mathrm{QAM}}$ ergibt sich

$$P_s^{M-\mathrm{QAM}} = P_s^{\sqrt{M}-\mathrm{PAM}} \cdot \left[2 - P_s^{\sqrt{M}-\mathrm{PAM}}\right] \approx 2 P_s^{\sqrt{M}-\mathrm{PAM}} . \tag{6.5.12}$$

Da die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten für Real- und Imaginärteil identisch sind, gilt

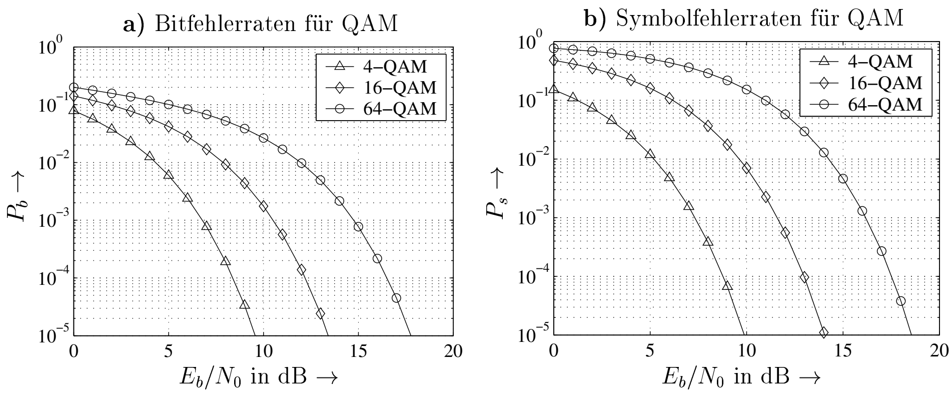

Bild 6.5.4: Symbol- und Bitfehlerwahrscheinlichkeiten für QAM und AWGN-Kanal

bei entsprechender Gray-Codierung bezüglich E_b/N_0

$$P_b^{M-\mathrm{QAM}} = P_b^{\sqrt{M}-\mathrm{PAM}} \approx \frac{2}{\mathrm{ld}(M)} \cdot \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot \mathrm{ld}(M)}{2(M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right) \; . \quad (6.5.13)$$

Die Näherung bezieht sich wie schon bei der ASK auf die Vernachlässigung von Entscheidungsfehlern zwischen nicht benachbarten Signalpunkten. Mit Hilfe der Programmroutinen `pb_qam_awgn` und `pb_pam_awgn` wurden die in den **Bildern 6.5.4a** und **b** dargestellten Ergebnisse erzielt.

DPSK. Für die differentielle Phasenmodulation gibt es nur für wenige Spezialfälle geschlossene Lösungen. Im Gegensatz zur reinen PSK ist die Information hier in der Phasendifferenz zweier aufeinanderfolgender Symbole enthalten. Hieraus folgt direkt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung nicht mehr von nur einem, sondern von zwei empfangenen Symbolen abhängt. Eine richtige Entscheidung wird demnach immer dann gefällt, wenn bei der Entscheidung zweier aufeinander folgender Symbole kein oder aber der gleiche Phasenfehler ϕ_μ auftritt. Eine Fehlentscheidung kommt dann mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_s^{\mathrm{DPSK}} = 1 - \sum_{\mu=0}^{M-1} P_\mu^2 \quad \text{(kohärent)} \qquad (6.5.14)$$

vor, wobei die Wahrscheinlichkeiten P_μ aus (6.5.2) bekannt sind und numerisch bestimmt werden können. Eine gute Näherung liefert auch die Annahme, daß sich die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit bei einer kohärenten Demodulation ungefähr