und '1 = an' annehmen können, erforderlich sind. Die absolute Redundanz dieser Codierung beträgt somit

$$R = \bar{m} - H(D) = 7\,\text{bit} - 3.32\,\text{bit} = 3.68\,\text{bit}\;,$$

also mehr als die Hälfte des Informationsgehalts, woraus sich die relative Redundanz

$$r = \frac{R}{\bar{m}} = \frac{\bar{m} - H(\mathcal{D})}{\bar{m}} = \frac{3.68\,\text{bit}}{7\,\text{bit}} = 0.5254$$

ergibt.

Lösung Aufgabe 8.2.2

Aufgabenteil a)
Mit Hilfe von (8.2.10) oder durch direktes Einsetzen der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in (8.2.13) ergibt sich die Kanalkapazität zu

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{BSC}} &= H(\mathcal{D}) + H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{D},\mathcal{Y}) \\ &= -\sum_{\nu=0}^{1} P(D_\nu)\log_2(P(D_\nu)) - \sum_{\mu=1}^{1} P(Y_\mu)\log_2(P(Y_\mu)) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{1}\sum_{\mu=0}^{1} P(D_\nu, Y_\mu)\log_2(P(D_\nu, Y_\mu)) \\ &= 1 + (1-P_e)\cdot\log_2(1-P_e) + P_e\cdot\log_2(P_e)\;. \end{aligned} \tag{8.2.23}$$

Für die Extremwerte $P_e = 0$ und $P_e = 1$ nimmt die Kanalkapazität C den Wert 1 bit/s/Hz an, es ist also ohne jegliche Kanalcodierung eine fehlerfreie Übertragung möglich. Für $P_e = 0.5$ gilt hingegen $C = 0$, es ist auch mit noch so großem Aufwand keine Übertragung möglich, da die Ausgangssymbole rein zufällig auftreten.

Aufgabenteil b)
Bild 8.2.3a zeigt die Transinformation des binären symmetrischen Kanals für verschiedene Eingangsstatistiken $P(D_0)$ und unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten P_e. Entsprechend (8.2.23) treten Maxima stets bei $P_e = 0$ bzw. $P_e = 1$ auf, hier kann ohne Kanalcodierung fehlerfrei übertragen werden. Die maximale erreichbare Transinformation ist hier gleich der Entropie der Quelle, die bekanntlich für gleichwahrscheinliche Symbole D_ν ihr Maximum annimmt. Aufgrund der symmetrischen Struktur des BSC (s. Bild 2.4.2) wird die Kanalkapazität auch für die übrigen Übergangswahrscheinlichkeiten P_e stets für Gleichverteilung am Eingang erreicht ($P(D_0) = P(D_1) = 0.5$).