Aufgabenteil b)
Die Prüfmatrix eines Hamming-Codes der Ordnung $r = 3$ kann einfach erzeugt werden, indem die Dualzahlen von 1 bis 7 in Spalten angeordnet werden

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Leider kann aus dieser nicht systematischen Form nicht direkt die Generatormatrix nach (8.4.4) konstruiert werden. Wir bilden daher zunächst einen äquivalenten systematischen Code $\mathbf{H}_s$ durch Vertauschen der Spalten von $\mathbf{H}$ und berechnen durch ihn die systematische Generatormatrix $\mathbf{G}_s$

$$\mathbf{H}_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Um letztendlich die zu $\mathbf{H}$ passende Generatormatrix $\mathbf{G}$ zu erhalten, muß das Vertauschen der Spalten wieder rückgängig gemacht werden. Die Generatormatrix des Originalcodes hat die Form

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabenteil c)
Die Betrachtung von $\mathbf{H}$ zeigt, daß keine zwei linear abhängigen (identischen) Spalten existieren. Allerdings gibt es Kombinationen aus drei Spalten, die linear abhängig sind (beispielsweise die ersten drei Spalten). Dies ist auch genau die Mindestdistanz des Codes. Es gilt der allgemeine Zusammenhang, daß die Mindestdistanz des Codes identisch mit der minimalen Anzahl linear abhängiger Spalten der Prüfmatrix ist.

Lösung Aufgabe 8.4.2

Aufgabenteil a)
Ein zusätzliches Prüfbit c_7 bedeutet für die Prüfmatrix $\mathbf{H}_s$ des Originalcodes, daß die Anzahl der Spalten (Codewortlänge) und Zeilen (Anzahl Prüfbit) um je Eins

erhöht wird. Soll der erweiterte Code die Mindestdistanz $d_{\text{min}} = 4$ besitzen, so muß dessen Prüfmatrix $\mathbf{H}_E$ gemäß Aufgabe 8.4.1c mindestens 4 linear unabhängige Spalten enthalten. Die einfachste Erweiterung besteht darin, zunächst eine Spalte aus Nullen anzuhängen, wodurch die Decodierung des Originalcodes nicht beeinträchtigt wird. Dann wird eine Zeile aus Einsen angefügt, die eine zusätzliche Parity-Check-Summe über alle $n = 7$ Bit des Originalcodes bildet. Damit besitzt jedes Codewort des erweiterten Codes ein gerades Gewicht, d.h. die ungerade Mindestdistanz $d_{\text{min}} = 3$ wird auf $d_{E,\,\text{min}} = 4$ erhöht. Die neue Prüfmatrix lautet

$$\mathbf{H}_E = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) .$$

Die zugehörige Generatormatrix $\mathbf{G}_E$ erhalten wir, indem eine zusätzliche Spalte $\mathbf{g}^+$ für das hinzugekommene Prüfbit c_7 angehängt wird. Da c_7 die Prüfsumme über alle c_i mit $0 \le i < 7$ repräsentiert, lautet die Bedingung für $\mathbf{g}^+$

$$c_7 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}^+ \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^{6} c_i \bmod 2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G_s} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g}^+ = \mathbf{G_s} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Spalte $\mathbf{g}^+$ berechnet sich also aus der modulo-2-Summe aller Spalten von $\mathbf{G}_s$. Die Generatormatrix des erweiterten Codes hat die Form

$$\mathbf{G}_E = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) .$$

Aufgabenteil b)

Die Halbierung des Coderaums wird durch das Streichen eines Informationsbits erreicht. Dadurch entsteht ein halbratiger (6,3)-Code. Bei Verwendung des systematischen Codierers aus Aufgabe 8.4.1 kann jedes der vier Informationsbit des Originalcodes gestrichen werden. In allen Fällen beträgt die Mindestdistanz weiterhin $d_{\text{min}} = 3$. Die Generatormatrix entsteht durch Streichen der i-ten Zeile und Spalte von $\mathbf{G}_s$, $1 \le i \le k$, bei der Prüfmatrix entsprechend die i-te Spalte von $\mathbf{H}_s$. Beide Matrizen lauten für das Beispiel $i = k = 4$

$$\mathbf{G}_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{H}_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$